УДК 517.1
ББК 22.161
С28

С е д р а к я н Н. М., А в о я н А. М. **Неравенства. Методы доказательства** / Пер. с арм. Г. В. Григоряна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с. — ISBN 5-9221-0273-7.

В книге объяснены некоторые методы доказательства неравенств, и эти методы применены к доказательству неравенств различных типов. Ее можно применять при внекласной работе и при подготовке к математическим олимпиадам.

Выпущена на ярмянском языке в 1998 г. (г. Ереван, "Наири").

Для преподавателей и учащихся старших классов средней школы.

Ил. 11. Библиогр. 17 назв.

ISBN 5-9221-0273-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

На олимпиадах для школьников по математике часто предлагаются неравенства, доказательство которых лучше выявляет способности и возможности учащихся, степень их интеллектуального развития. Эта книга призвана научить учащихся методам доказательства неравенств.

Методы доказательства неравенств многочисленны и разнообразны. В каждом параграфе книги приводится один метод доказательства неравенств или доказательство неравенств какого-нибудь раздела математики. В книгу включены методы, использующие соотношения между средними арифметическими, геометрическими, гармоническими и квадратичными, методы математической индукции и замены переменных, методы, использующие неравенства Коши–Буняковского, Йенсена, Чебышева, свойства функций и т. д. Эти методы позволяют не только доказывать разнообразные неравенства, но и решать некоторые задачи, связанные с неравенствами. Для пояснения каждого метода доказательства приводятся примеры и упражнения, которые снабжены решениями или указаниями. В конце каждого параграфа даются упражнения для самостоятельного решения.

В § 14 (Различные неравенства) помещены неравенства, для доказательства которых используются методы, которые не освещены в предыдущих параграфах, или же при их доказательстве используется одновременно несколько методов.

Книгу завершает параграф “Сто избранных неравенств”, при доказательстве которых выбор метода предоставляется читателю.

В каждом параграфе мы старались расположить неравенства по сходству доказательств и возрастанию сложности, что позволит читателю самостоятельно доказывать эти неравенства и только при возникновении трудностей обращаться к приведенным доказательствам. Советуем при использовании решений, приведенных в книге, больше внимания уделять выбору метода доказательства.

В книге использованы неравенства, предлагавшиеся на математических олимпиадах ряда стран, однако приведенные здесь решения существенно отличаются от авторских. Было сочтено целесообразным решения задач поместить в конце того же параграфа.

На составителей книги оказали большое влияние статьи Л.Д. Курляндчика с соавторами, посвященные неравенствам. Авторам этих статей составители приносят свою благодарность авторам этих статей.

Авторы выражают благодарность Г.В. Григоряну за помощь в подготовке рукописи книги к изданию на русском языке.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА

В курсе алгебры средней школы подробно описаны те основные свойства неравенств, которые необходимы для доказательства простейших неравенств. Учитывая то, что читатель знаком с этими свойствами, из большого числа простейших неравенств ниже приводятся те, которые в дальнейшем будут использованы при доказательстве более сложных неравенств.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите следующие неравенства.

1.1. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

1.2. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a, b \geqslant 0$.

1.3. $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, где $a, b > 0$.

1.4. $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$.

1.5. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, где $a, b > 0$.

1.6. $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

1.7. $a + b > 1 + ab$, где $a > 1$, $b < 1$.

1.8. $a^2 + b^2 > c^2 + (a + b - c)^2$, где $a > c$, $b < c$.

1.9. а) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$, где $ab > 0$; б) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \leqslant -2$, где $ab < 0$.

1.10. $x_1 \leqslant \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant x_n$, где $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

1.11. $\dfrac{x_1}{y_1} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \leqslant \dfrac{x_n}{y_n}$, где $\dfrac{x_1}{y_1} \leqslant \dfrac{x_2}{y_2} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{x_n}{y_n}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$.

1.12. $x_1 \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant x_n$, где $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $n \geqslant 2$.

1.13. $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \geqslant |a_1 + a_2 + \ldots + a_n|$.

1.14. $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

1.15. $(a+b)\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$, где $a, b > 0$.

1.16. $\dfrac{1}{2}(a+b) + \dfrac{1}{4} \geqslant \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$, где $a, b > 0$.

1.17. $a(x+y-a) \geqslant xy$, где $x \leqslant a$, $y \geqslant a$.

1.18. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x}$, где $x > 1$.

1.19. $\dfrac{1}{3k+1} + \dfrac{1}{3k+2} + \dfrac{1}{3k+3} > \dfrac{1}{2k+1} + \dfrac{1}{2k+2}$, где $k \in \mathrm{N}$.

1.20. $\dfrac{ab}{(a+b)^2} \leqslant \dfrac{(1-a)(1-b)}{((1-a)+(1-b))^2}$, где $0 < a$, $b \leqslant \dfrac{1}{2}$.

1.21. $\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \dfrac{2k+1}{2k+2} < \dfrac{1}{\sqrt{3k+4}}$, где $k \in \mathrm{N}$.

1.22. $2^{n-1} \geqslant n$, где $n \in \mathrm{N}$.

1.23. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \dfrac{100}{101} \cdot \dfrac{1}{103} < 1$.

1.24. а) $\dfrac{1-a}{1-b} + \dfrac{1-b}{1-a} \leqslant \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$, где $0 < a, b \leqslant \dfrac{1}{2}$;

б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i} \sum_{i=1}^{n} (1-a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i$, где $0 < a_1, \ldots, a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

РЕШЕНИЯ

1.1 *). $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$.

1.2. Доказательство аналогично доказательству 1.1:

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^2 \geqslant 0.$$

*) В упр. 1.1–1.6 равенства имеют место тогда и только тогда, когда $a = b$.

1.3. Умножая обе части неравенства 1.2 на $2\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$, получим данное неравенство.

1.4. Из известного неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$ (упр. 1.1) получим эквивалентное неравенство $a^2 + b^2 + 2ab \leqslant 2a^2 + 2b^2$, откуда следует неравенство $\dfrac{(a+b)^2}{4} \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, или $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, которое можно переписать в виде $\left|\dfrac{a+b}{2}\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$; отсюда следует $\dfrac{a+b}{2} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

1.5. Данное неравенство получается из неравенств упр. 1.2 и 1.3.

1.6. См. решение упр. 1.4.

1.7. Используя тождество $a + b - 1 - ab = (a-1)(1-b)$ и условия $a > 1$, $b < 1$, нетрудно заметить, что $(a-1)(1-b) > 0$.

1.8. Оценим разность левой и правой частей неравенства:

$$a^2 + b^2 - c^2 - (a+b-c)^2 = (a^2 - c^2) - ((a+b-c)^2 - b^2) =$$
$$= (a-c)(a+c) - (a-c)(a+2b-c) = 2(a-c)(c-b) > 0,$$

так как согласно условию $a > c$, $b < c$.

1.9. а) Умножая обе части неравенства на число $ab > 0$, получим очевидное неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

б) Поделив обе части неравенства $a^2 + b^2 \geqslant -2ab$ на число $ab < 0$, получим необходимое неравенство.

1.10. Поскольку согласно условию $x_1 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant x_n$, то $nx_1 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant nx_n$, откуда следует, что

$$x_1 \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant x_n.$$

1.11. Из заданных условий получаем, что

$$y_i\,\frac{x_1}{y_1} \leqslant x_i \leqslant y_i\,\frac{x_n}{y_n} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Складывая эти неравенства, получаем $\dfrac{x_1}{y_1}(y_1 + \ldots + y_n) \leqslant x_1 + \ldots$ $\ldots + x_n \leqslant \dfrac{x_n}{y_n}(y_1 + \ldots + y_n)$, откуда следует, что

$$\frac{x_1}{y_1} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} \leqslant \frac{x_n}{y_n}.$$

1.12. Имеем $x_1 \leqslant x_i \leqslant x_n$ $(i = 1, \ldots, n,\ \ n \geqslant 2)$. Перемножая эти неравенства, получим $x_1^n \leqslant x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant x_n^n$, откуда получаем

$$x_1 \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant x_n.$$

1.13. Если $a_1 + \ldots + a_n \geqslant 0$, то $|a_1 + \ldots + a_n| = a_1 + \ldots + a_n$. Используя неравенство $a \leqslant |a|$, получаем

$$|a_1 + \ldots + a_n| = a_1 + \ldots + a_n \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Если $a_1 + \ldots + a_n < 0$, то $|a_1 + \ldots + a_n| = -a_1 - \ldots - a_n$. Используя неравенство $-a \leqslant |a|$, получаем

$$|a_1 + \ldots + a_n| = -a_1 - \ldots - a_n \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

1.14. Поскольку

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = \\ = \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)}_{n(n-1)/2 \text{ слагаемых}} + n,$$

то, используя упр. 1.9, а), получим

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

откуда следует данное неравенство.

1.15. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2},$$

которое получается перемножением неравенств $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (упр. 1.2) и $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ (которое следует из упр. 1.6).

1.16. Имеем

$$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{a+b}{2}} = \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

следовательно, $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{4} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}}$.

1.17. Поскольку $a(x+y-a) - xy = ax - xy + a(y-a) = (y-a) \times \times (a-x)$ и $y \geqslant a \geqslant x$, то $(y-a)(a-x) \geqslant 0$, откуда получаем

$$a(x+y-a) \geqslant xy.$$

1.18. Воспользовавшись неравенством упр. 1.5, получим

$$\frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}{2} > \frac{2}{(x-1)+(x+1)},$$

или $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{2}{x}$.

1.19. Согласно неравенству из упр. 1.18 имеем
$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+3}=\frac{1}{(3k+2)-1}+\frac{1}{(3k+2)+1}>\frac{2}{3k+2},$$
следовательно,
$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}>\frac{3}{3k+2}.$$

Теперь докажем, что $\dfrac{3}{3k+2}>\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}$. Действительно,
$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{3}{3k+2}=\frac{-k}{(2k+1)\,(2k+2)\,(3k+2)}<0.$$

1.20. Данное неравенство эквивалентно неравенству
$$\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right).$$
Поскольку
$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)-\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2=\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{a+b}=$$
$$=\frac{1}{ab}-\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{a+b}-\frac{a+b}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab\,(a+b)^2}-\frac{(a-b)^2}{ab\,(a+b)}=$$
$$=\frac{(a-b)^2\,(1-(a+b))}{ab\,(a+b)^2},\qquad 0<a,\ b\leqslant\frac{1}{2},$$
то $\dfrac{(a-b)^2\,(1-(a+b))}{ab\,(a+b)^2}\geqslant 0$, следовательно,
$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\geqslant\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2.$$

1.21. Данное неравенство эквивалентно неравенству
$$(2k+1)\,\sqrt{3k+4}<(2k+2)\,\sqrt{3k+1},$$
или неравенству
$$(2k+1)^2\,(3k+4)<(2k+2)^2\,(3k+1)\,.$$
Последнее неравенство справедливо, так как
$$(2k+2)^2\,(3k+1)-(2k+1)^2\,(3k+4)=k>0.$$

1.22. Поскольку $1<2<2^2<\ldots<2^{n-1}$ и количество натуральных чисел $1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$ равно n, то $2^{n-1}\geqslant n$.

1.23. Пусть у зайца имеется одна морковь. В первый день он съедает $\frac{1}{3}$ моркови, во второй день — $\frac{1}{5}$ оставшейся части, на 51-й день — $\frac{1}{103}$ оставшейся части. Так как каждый день обязательно остается морковь, то сумма частей моркови, съеденных зайцем, должна быть меньше единицы.

В первый день заяц съел $\frac{1}{3}$ моркови, во второй день — $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\right)$-ю часть, на 51-й день — $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\cdot\frac{1}{103}\right)$-ю часть, что означает, что

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{7}+\ldots+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{100}{101}\cdot\frac{1}{103}<1.$$

1.24. а) Воспользовавшись неравенством из упр. 1.20, получим $\frac{((1-a)+(1-b))^2}{(1-a)(1-b)} \leqslant \frac{(a+b)^2}{ab}$ или $\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a} \leqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Второе решение. Заметим, что $1-a \geqslant a$ и $1-b \geqslant b$, следовательно,

$$\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}=\frac{(1-a)^2+(1-b)^2}{(1-a)(1-b)}=$$
$$=\frac{((1-a)-(1-b))^2+2(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)}=\frac{(a-b)^2}{(1-a)(1-b)}+2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(a-b)^2}{ab}+2=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},$$

поэтому $\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a} \leqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

б) Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=$$
$$=\underbrace{\left(\frac{1-a_1}{1-a_2}+\frac{1-a_2}{1-a_1}\right)+\ldots+\left(\frac{1-a_{n-1}}{1-a_n}+\frac{1-a_n}{1-a_{n-1}}\right)}_{n(n-1)/2\ \text{слагаемых}}+n,$$

то, используя неравенство из упр. 1.24, а), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)}_{n(n-1)/2\ \text{слагаемых}}+n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства.

1. $|x-y| < |1-xy|$, где $|x|, |y| < 1$.

2. $\dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$.

3. $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geqslant \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} - \dfrac{2}{c}$, где $a, b, c > 0$.

4. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{abc}$, где $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{5}{3}$ и $a, b, c > 0$.

5. $3(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$.

6. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \geqslant 144$, где $a + b = 4$, $c + d = 6$.

7. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 + na^2 \geqslant a\sqrt{2}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n})$.

8. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} \leqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}$, где $a, b, c > 0$.

9. $a^3\,(b^2 - c^2) + b^3\,(c^2 - a^2) + c^3\,(a^2 - b^2) < 0$, где $0 < a < b < c$.

10. $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$, где $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

11. $\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{x+z}{y} \leqslant \dfrac{(x+z)^2}{xz}$, где $0 < x \leqslant y \leqslant z$.

12. $$\sqrt{1+\sqrt{a}} + \sqrt{1+\sqrt{a+\sqrt{a^2}}} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{1+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a^n}}} < na, \text{ где } n,\ a \geqslant 2, \quad n \in \mathrm{N}.$$

13. а) $\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta) \leqslant \dfrac{(n-1)^2}{4n}$, где $\operatorname{tg}\alpha = n\operatorname{tg}\beta$, $n > 0$.

б) $1 + \cos(\alpha - \beta) \geqslant \cos\alpha + \cos\beta$, где $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

14. $[5x] \geqslant [x] + \dfrac{[2x]}{2} + \dfrac{[3x]}{3} + \dfrac{[4x]}{4} + \dfrac{[5x]}{5}$, где $[a]$ — целая часть числа a.

15. $(n!)^2 \geqslant n^n$, $n \in \mathrm{N}$.

16. $x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geqslant 0$.

17. $\lg^2\alpha \geqslant \lg\beta\lg\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma > 1$, $\alpha^2 \geqslant \beta\gamma$.

18. $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4{,}4$.

19. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}<\dfrac{1}{2}$, где $n\in\mathrm{N}$.

20. $\dfrac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\dfrac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3+1}{n^3-1}<\dfrac{3}{2}$, где $n\geqslant 2$, $n\in\mathrm{N}$.

21. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!<(n+1)!$, где $n\in\mathrm{N}$.

22. $\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<2$, где $n\geqslant 2$, $n\in\mathrm{N}$.

23. $\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right)>\dfrac{1}{2}$, где $1<p_1<p_2<\ldots$
$\ldots<p_n$, $p_i\in\mathrm{N}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

24. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\ldots-\dfrac{1}{999}+\dfrac{1}{1000}<\dfrac{2}{5}$.

25. $(\sin x+2\cos 2x)(2\sin 2x-\cos x)<4{,}5$.

26. а) $\dfrac{a+b}{1+a+b}\leqslant\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$, где $a,b\geqslant 0$;

б) $\dfrac{a+b}{2+a+b}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$, где $a,b\geqslant 0$;

в) $$n\leqslant\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1+2}+\ldots+\frac{a_n+b_n}{a_n+b_n+2}+ +\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_{i_1}}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_{i_1}}+2}+\ldots+\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_{i_n}}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_{i_n}}+2}<2n,$$
где $i_1,\ldots,i_n$ — некоторая перестановка чисел $1,\ldots,n$, $a_i,b_i>0$, $i=1,\ldots,n$.

27. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1+2a_2+\ldots+ia_i}{i^2}\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i$, где $a_i\geqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$.

28. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant\dfrac{41}{42}$, где $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$, $a,b,c\in\mathrm{N}$.

29. $\dfrac{4x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}>2$, где $x,y,z>0$.

30. $1<\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}<2$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

31. $a+b>c+d$, где $a,b,c,d\geqslant\dfrac{1}{2}$ и $a^2+b>c^2+d$, $a+b^2>c+d^2$.

Указание. Если $a + b \leqslant c + d$, то $a \leqslant c$ или $b \leqslant d$. Когда $a \leqslant c$,

$$b - d > (c - a)(c + a) \geqslant c - a.$$

32. Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

где $a, b > 0$.

33. Если $0 < a, b, c < 1$, то одно из чисел $(1 - a)\,b$, $(1 - b)\,c$, $(1 - c)\,a$ не больше $\frac{1}{4}$.

34. Пусть $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что:

а) $\sqrt{a + \frac{1}{4}(b - c)^2} + \sqrt{b + \frac{1}{4}(c - a)^2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}(b - a)^2} \leqslant 2$;

б) $\sqrt{a + \frac{1}{4}(b - c)^2} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leqslant \sqrt{3}$.

Указание. а) $\sqrt{x + \frac{1}{4}(y - z)^2} \leqslant x + \frac{y + z}{2}$, если $x, y, z > 0$ и $x + y + z = 1$.

§ 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ШТУРМА

Метод, предложенный немецким математиком Р. Штурмом, кроме различных приложений дает возможность провести оценку неравенств при наличии определенных условий. С помощью этого метода можно доказать ряд неравенств.

Пример 2.1. Доказать, что если произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

Доказательство. Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Пусть среди рассматриваемых чисел есть хотя бы два не равных друг другу. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найдутся два таких числа, одно из которых будет больше 1, а другое меньше (упр. 1.12). Пусть это числа x_1 и x_2, причем $x_1 < 1$, $x_2 > 1$. Заметим, что $x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2$ (упр. 1.7).

Таким образом, если заданные числа заменим числами 1, x_1x_2, $x_3, \ldots, x_n$, то их произведение опять будет равно 1, а сумма

$$1 + x_1x_2 + x_3 + \ldots + x_n < x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Действуя с полученными числами $1, x_1x_2, x_3, \ldots, x_n$ аналогичным образом, получим новую последовательность, в которой будут равны 1 уже два члена. Действуя так же самое большее $n - 1$ раз, получим последовательность, в которой $n - 1$ членов равны 1, а n-й член равен $x_1 \ldots x_n$, т. е. опять равен 1.

Таким образом, получили, что $n < x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Из доказательства видно, что рассматриваемое неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Пример 2.2. Доказать, что если сумма чисел $x_1, \ldots, x_n$ равна 1, то $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

Доказательство. Если $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, то

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{1}{n}.$$

Пусть среди рассматриваемых чисел есть хотя бы два не равных друг другу. Среди этих чисел найдутся два таких числа, одно из которых будет больше $\frac{1}{n}$, а другое меньше $\frac{1}{n}$ (упр. 1.10). Пусть это числа x_1 и x_2, причем $x_1 < \frac{1}{n}$ и $x_2 > \frac{1}{n}$. Таким образом, заменяя x_1 на $\frac{1}{n}$,

а x_2 на $x_1 + x_2 - \dfrac{1}{n}$, получаем новую последовательность чисел

$$\frac{1}{n},\ x_1 + x_2 - \frac{1}{n},\ x_3,\ \ldots,\ x_n,$$

сумма которых снова равна 1, а так как

$$x_1^2 + x_2^2 > \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n}\right)^2$$

(упр. 1.8), то

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{n}\right)^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2.$$

Повторяя эти действия конечное число раз, получим последовательность, все члены которой будут равны $\dfrac{1}{n}$, а сумма их квадратов будет меньше суммы квадратов заданных чисел $x_1, \ldots, x_n$, т. е.

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 > \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

Из приведенного доказательства видно, что рассматриваемое неравенство превращается в равенство в том и только том случае, когда $x_1 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 2.1–2.6.

2.1. $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, где $x_1, \ldots, x_n > 0$.

2.2. $\sqrt{\dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

2.3. $\dfrac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{x_1 \ldots x_n} \geqslant (n-1)^n$, где $x_1, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

2.4. $\dfrac{1}{1 + x_1} + \ldots + \dfrac{1}{1 + x_n} \geqslant \dfrac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}$, где $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$, $n \geqslant 2$.

2.5. $abc + bcd + cda + dab \leqslant \dfrac{1}{27} + \dfrac{176}{27}abcd$, где $a, b, c, d \geqslant 0$ и $a + b + c + d = 1$.

2.6. $0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \dfrac{7}{27}$, где $x, y, z \geqslant 0$ и $x + y + z = 1$.

2.7. Среди треугольников с углами, не превышающими 75°, которые вписаны в данную окружность, найти тот, периметр которого:

а) является наибольшим;

б) является наименьшим.

2.8. Докажите, что если для любых чисел α и β имеет место неравенство

$$\alpha f(a) + \beta f(b) \geqslant f(\alpha a + \beta b)$$

$$(\text{соответственно} \quad \alpha f(a) + \beta f(b) \leqslant f(\alpha a + \beta b)),$$

где $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ и a, b — любые числа из области $D(f) = I$, а $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n \in I$ и удовлетворяют условиям

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n, \qquad y_1 \leqslant x_1,$$

$$y_1 + y_2 \leqslant x_1 + x_2, \qquad \ldots, \qquad y_1 + \ldots + y_{n-1} \leqslant x_1 + \ldots + x_{n-1},$$

$$y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n,$$

то

$$f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) \leqslant f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

$$(\text{соответственно} \quad f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) \geqslant$$
$$\geqslant f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)).$$

2.9. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ удовлетворяют следующему условию:

а) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{3}$ $(i = 1, 2, \ldots, 1997)$;

б) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$.

Найдите наибольшее значение выражения $x_1^{12} + x_2^{12} + \ldots + x_{1997}^{12}$.

2.10. Докажите неравенство

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n (\operatorname{tg}\alpha_1 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n) \leqslant \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{n^{(n-2)/2}},$$

где $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant \alpha_i < \dfrac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.11. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k (1 - x_i) \leqslant a_k,$$

где $k \geqslant 2$, $k \in \mathrm{N}$ и $a_k = \max\limits_{[0;1]} (x^k(1-x) + (1-x)^k x)$, а $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_1 + \ldots + x_n = 1$, $n \geqslant 2$.

РЕШЕНИЯ

2.1. Рассмотрим числа $\dfrac{x_1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}, \ldots, \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}$, произведение которых равно 1. Тогда согласно примеру 2.1 имеем неравенство

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}\geqslant n,$$

или

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}. \tag{2.1}$$

Нетрудно заметить, что в данном неравенстве знак равенства имеет место, когда $x_1=\ldots=x_n$.

Неравенство (2.1) известно как *неравенство Коши.*

2.2. Рассмотрим числа $\dfrac{x_1}{x_1+\ldots+x_n}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_1+\ldots+x_n}$, сумма которых равна 1. Согласно примеру 2.2 имеем

$$\left(\frac{x_1}{x_1+\ldots+x_n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{x_1+\ldots+x_n}\right)^2\geqslant\frac{1}{n},$$

или

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2, \tag{2.2}$$

откуда и получается заданное неравенство.

Нетрудно заметить, что неравенство (2.2) превращается и равенство тогда и только тогда, когда $x_1=\ldots=x_n$.

2.3. Так как $x_1+\ldots+x_n=1$, то согласно упр. 1.10 найдутся два числа, одно из которых не больше $\dfrac{1}{n}$, а другое не меньше $\dfrac{1}{n}$. Для определенности примем, что $x_1\leqslant\dfrac{1}{n}$, $x_2\geqslant\dfrac{1}{n}$.

Заменив x_1 на $\dfrac{1}{n}$, а x_2 на $x_1+x_2-\dfrac{1}{n}$, получим числа $\dfrac{1}{n}$, $\left(x_1+x_2-\dfrac{1}{n}\right)$, $x_3,\ldots,x_n$, для которых получим

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1\ldots x_n}\geqslant\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-x_1-x_2+\frac{1}{n}\right)\ldots(1-x_n)}{\frac{1}{n}\left(x_1+x_2-\frac{1}{n}\right)\ldots x_n},$$

так как $\dfrac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1x_2}\geqslant\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-x_1-x_2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left(x_1+x_2-\frac{1}{n}\right)}$ (упр. 1.17) и

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1x_2}=1+\frac{1-(x_1+x_2)}{x_1x_2}.$$

Повторяя это действие конечное число раз, получим n чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{n}$, и для этих чисел левая часть неравенства, которая равна $(n-1)^n$, не больше $\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1\dots x_n}$.

2.4. Обозначим $\sqrt[n]{x_1\dots x_n} = m$. Согласно упр. 1.12 можем принять, что $x_1 \leqslant m$, $x_2 \geqslant m$, следовательно, для чисел m, $\frac{x_1x_2}{m}$, $x_3, \dots$ $\dots, x_n$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+\dfrac{x_1x_2}{m}}+\dots+\frac{1}{1+x_n},$$

так как $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2} \geqslant \frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+\dfrac{x_1x_2}{m}}$ (упр. 1.17) и

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2} = 1+\frac{1-x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}.$$

Через конечное число ходов получим

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{1+m}+\dots+\frac{1}{1+m}}_{n} = \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\dots x_n}}.$$

2.5. Если $a=b=c=d=\frac{1}{4}$, то имеет место равенство. Пусть $a < \frac{1}{4}$, $b > \frac{1}{4}$. Тогда:

а) $c+d-\frac{176}{27}\,cd < 0$; заметим, что

$$A = ab\Big(c+d-\frac{176}{27}\,cd\Big)+cd\,(a+b) \leqslant$$
$$\leqslant cd\,(a+b) \leqslant \left(\frac{c+d+(a+b)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

используя упр. 2.1;

б) $c+d-\frac{176}{27}cd \geqslant 0$; заметим, что

$$A \leqslant \frac{1}{4}\Big(a+b-\frac{1}{4}\Big)\Big(c+d-\frac{176}{27}\,cd\Big)+cd\left(\frac{1}{4}+\Big(a+b-\frac{1}{4}\Big)\right).$$

Таким образом, неравенство необходимо доказать для чисел $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = a+b-\frac{1}{4}$, $c_1 = c$, $d_1 = d$.

Действуя аналогичным образом, мы или докажем неравенство для чисел a_1, b_1, c_1, d_1, или останется доказать неравенство для случая, когда два числа из a_1, b_1, c_1, d_1 равны $\frac{1}{4}$. В конце концов мы придем

к необходимости доказать неравенство для случая, когда все числа равны $\frac{1}{4}$, но в этом случае неравенство, очевидно, выполняется.

2.6. Пусть $x \geqslant y \geqslant z$; тогда понятно, что $y \leqslant \frac{1}{2}$, следовательно,

$$0 \leqslant y\,(x+z) + xz\,(1-2y) \leqslant$$
$$\leqslant y\Big(\frac{1}{3} + \Big(x+z-\frac{1}{3}\Big)\Big) + \frac{1}{3}\Big(x+z-\frac{1}{3}\Big)\,(1-2y)\,.$$

Таким образом, если в выражении $xy+yz+xz-2xyz$ заменить числа x, y, z на числа $\frac{1}{3}, y, x+z-\frac{1}{3}$, то его значение увеличится. Повторив эту операцию, заменим числа $\frac{1}{3}, y, x+z-\frac{1}{3}$ на числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$xy+yz+xz-2xyz \leqslant \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{7}{27}.$$

2.7. Согласно теореме синусов

$$p = a+b+c = 2R\,(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\,.$$

а) Докажем, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Если треугольник не равносторонний, то можем принять $\alpha > \frac{\pi}{3} > \beta$.

Докажем, что

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta) < \sin\frac{\pi}{3}+\sin\Big(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3}\Big)+\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Действительно,

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\frac{\pi}{3}-\sin\Big(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3}\Big) =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2} - 2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha+2\beta-\frac{\pi}{3}}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\Big(-2\sin\frac{\frac{2\pi}{3}-2\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Big) =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\beta-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} < 0.$$

Следовательно, периметр треугольника с углами α, β, γ меньше периметра треугольника с углами $\frac{\pi}{3}, \alpha+\beta-\frac{\pi}{3}, \gamma$. Если $\gamma \neq \frac{\pi}{3}$, то полу-

чим, что периметр треугольника с углами $\frac{\pi}{3}, \alpha+\beta-\frac{\pi}{3}, \gamma$ меньше, чем периметр треугольника с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

б) Докажем, что наименьший периметр будет у треугольника с углами $75°$, $75°$, $30°$. Для этого достаточно доказать, что периметр треугольника с углами α, β, γ не меньше периметра треугольника с углами $75°$, $\alpha+\beta-75°$, γ.

Действительно, $\sin 75° + \sin(\alpha+\beta-75°) \leqslant \sin\alpha + \sin\beta$, так как

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta-\sin 75°-\sin(\alpha+\beta-75°) = \\
&\quad = (\sin\alpha-\sin 75°)+(\sin\beta-\sin(\alpha+\beta-75°)) = \\
&\quad = 2\sin\frac{\alpha-75°}{2}\cos\frac{\alpha+75°}{2}-2\sin\frac{\alpha-75°}{2}\cos\frac{\alpha+2\beta-75°}{2} = \\
&\quad = 4\sin\frac{\alpha-75°}{2}\sin\frac{\beta-75°}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant 0, \qquad 0° < \alpha,\ \beta \leqslant 75°.
\end{aligned}$$

2.8. Если $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n) = f(y_1)+\ldots+f(y_n).$$

Пусть для некоторого i справедливо $x_i \neq y_i$. Из приведенных условий следует, что если m — наименьший номер, при котором $x_m \neq y_m$, то $y_m < x_m$. Пусть j — тот наибольший номер, при котором $y_j < x_j$; k — наименьший номер, больший j, при котором $x_k < y_k$. Заметим, что такое k существует, так как в противном случае имеем

$$\begin{gathered}
x_1+x_2+\ldots+x_{j-1}+x_j > y_1+y_2+\ldots+y_j, \\
x_{j+1} \geqslant y_{j+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n \geqslant y_n.
\end{gathered}$$

Складывая полученные неравенства, приходим к противоречию: $x_1 + x_2+\ldots+x_n > y_1+y_2+\ldots+y_n$. Таким образом, $x_j > y_j \geqslant y_k > x_k$.

Пусть $\delta = \min(x_j-y_j, y_k-x_k)$ и $\lambda = 1-\frac{\delta}{x_j-x_k}$. Рассмотрим числа $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j+(1-\lambda)x_k = x_j^*, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k + (1-\lambda)x_j = x_k^*, x_{k+1}, \ldots, x_n$ и проверим, что для них выполняются условия упражнения.

Действительно, $x_1+\ldots+x_i \geqslant y_1+\ldots+y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, j-1)$, что очевидно. Неравенство

$$y_1+y_2+\ldots+y_j \leqslant x_1+x_2+\ldots+x_{j-1}+\lambda x_j+(1-\lambda)x_k$$

верно, поскольку $\lambda x_j+(1-\lambda)x_k = x_j-\delta \geqslant x_j-(x_j-y_j) = y_j$.

Так как $x_{j+1} \geqslant y_{j+1}, \ldots, x_{k-1} \geqslant y_{k-1}$, то

$$x_1+\ldots+x_i \geqslant y_1+\ldots+y_i, \qquad i = j+1, \ldots, k-1.$$

Для остальных величин имеем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i = x_1 + \ldots + x_{j-1} + (\lambda x_j + (1-\lambda)\, x_k) + x_{j+1} + \ldots$$
$$\ldots + x_{k-1} + (\lambda x_k + (1-\lambda)\, x_j) + \ldots + x_i,$$

следовательно, для чисел условия упражнения опять выполняются.

С другой стороны,

$$f(x_1) + \ldots + f(x_{j-1}) + f(x_j) + \ldots + f(x_k) + \ldots + f(x_n) \geqslant$$
$$\geqslant f(x_1) + \ldots + f(x_{j-1}) + f(x_j^*) + f(x_{j+1}) + \ldots + f(x_{k-1}) +$$
$$+ f(x_k^*) + \ldots + f(x_n),$$

так как $f(x_j^*) = f(\lambda x_j + (1-\lambda)\, x_k) \leqslant \lambda f(x_j) + (1-\lambda) f(x_k)$ и $f(x_k^*) = f(\lambda x_k + (1-\lambda)\, x_j) \leqslant \lambda f(x_k) + (1-\lambda) f(x_j)$; следовательно,

$$f(x_j^*) + f(x_k^*) \leqslant f(x_j) + f(x_k).$$

С другой стороны, $\delta = x_j - y_j$ или $y_k - x_k$, следовательно, $x_j^* = y_j$ или $x_k^* = y_k$.

Таким образом, мы заменили числа $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ на числа x_1, x_2, …, x_{j-1}, x_j^*, $x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}$, x_k^*, $x_{k+1}, \ldots, x_k$, так что условия упражнения снова выполняются. С другой стороны, сумма $f(x_1) + \ldots$ $\ldots + f(x_j^*) + \ldots + f(x_k^*) + \ldots + f(x_n)$ не возросла, а количество i, удовлетворяющих условию $x_i = y_i$, увеличилось на единицу, следовательно, после числа ходов, не превышающего $n-1$, получим, что

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + \ldots + f(y_n).$$

2.9. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если $a \leqslant b$ и $x > 0$, то*

$$(b+x)^{12} + (a-x)^{12} > a^{12} + b^{12}.$$

Действительно,

$$(b+x)^{12} + (a-x)^{12} - a^{12} - b^{12} =$$
$$= C_{12}^1 x\,(b^{11} - a^{11}) + C_{12}^2 x^2\,(b^{10} + a^{10}) + \ldots + 2x^{12} > 0.$$

Обозначим $y_i = \sqrt{3} x_i$; имеем

$$-1 \leqslant y_i \leqslant 3, \qquad i = 1,\, 2, \ldots,\, 1997, \tag{2.3}$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{1997} = -954 \tag{2.4}$$

и

$$x_1^{12} + \ldots + x_{1997}^{12} = \frac{y_1^{12} + \ldots + y_{1997}^{12}}{3^6}.$$

Если какие-нибудь два числа из чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{1997}$ принадлежат интервалу $(-1, 3)$, то согласно лемме эти два числа можно заменить числами, одно из которых равно -1 или 3, и удовлетворяются условия (2.3) и (2.4), причем сумма $y_1^{12} + \ldots + y_{1997}^{12}$ возрастет.

Из сказанного следует, что сумма $y_1^{12}+\ldots+y_{1997}^{12}$ будет наибольшей, если числа $y_1^{12},\ldots,y_{1997}^{12}$ заменить или на числа $-1,\ldots,-1,3,\ldots,3$, или на числа $-1,-1,\ldots,-1,3,\ldots,3,a$; $a\in(-1;3)$.

Учитывая условие (2.4) получим, что возможен только второй случай, причем $k=\dfrac{a+2}{4}+1735$, где k — количество -1. Так как $\dfrac{a+2}{4}\in Z$ и $a\in(-1;3)$, то $a=2$.

Таким образом, наибольшее значение выражения $x_1^{12}+\ldots+x_{1997}^{12}$ равно

$$\frac{1736+260\cdot 3^{12}+2^{12}}{3^6}=189548.$$

2.10. Пусть

$$\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}=\varphi. \tag{2.5}$$

Если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\varphi$, то

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n)=\cos^n\varphi\cdot n\cdot\operatorname{tg}\varphi=\\ =n\cdot\sin\varphi\,\cos^{n-1}\varphi=n\sqrt{\sin^2\varphi\,(\cos^2\varphi)^{n-1}}=\\ =n\sqrt{(n-1)^{n-1}\sin^2\varphi\,\frac{\cos^2\varphi}{n-1}\ldots\frac{\cos^2\varphi}{n-1}}\leqslant\\ \leqslant n\sqrt{(n-1)^{n-1}\left(\frac{\sin^2\varphi+\dfrac{\cos^2\varphi}{n-1}+\ldots+\dfrac{\cos^2\varphi}{n-1}}{n}\right)^n}=\\ =n\sqrt{(n-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}}=\frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{n^{(n-2)/2}}.\end{aligned}$$

Если $\alpha_i\neq\alpha_j$ при некоторых i и j $(i\neq j)$, то среди этих чисел найдутся два таких числа, одно из которых больше φ, а другое меньше φ (см. упр. 1.10).

Пусть это числа α_1 и α_2, причем $\alpha_1<\varphi<\alpha_2$. Таким образом, заменяя α_1 на φ, а α_2 на $\alpha_1+\alpha_2-\varphi$, получаем новую последовательность чисел $\varphi,\alpha_1+\alpha_2-\varphi,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$, для которых верно (2.5), а так как

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1\cos\alpha_2=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right)<\\ <\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(2\varphi-(\alpha_1+\alpha_2))\right)=\cos\varphi\cos(\alpha_1+\alpha_2-\varphi),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n)=\\ =\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\\ \ldots\cos\alpha_n(\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n)<\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_n+\end{aligned}$$

$$+\cos\varphi\cos(\alpha_1+\alpha_2-\varphi)(\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n) =$$
$$=\cos\varphi\cos(\alpha_1+\alpha_2-\varphi)\cos\alpha_3\ldots$$
$$\ldots\cos\alpha_n(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2-\varphi)+\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n).$$

Действуя с полученными числами φ, $\alpha_1+\alpha_2-\varphi$, $\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ аналогичным образом, получим новую последовательность, в которой φ будут равны уже два члена. Повторив эти действия самое большее $n-1$ раз, получим последовательность в, которой $n-1$ членов будут равны φ, а n-й равен $n\varphi-(n-1)\varphi=\varphi$, т. е. опять равен φ.

Таким образом, мы получили

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(\operatorname{tg}\alpha_1+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n) <$$
$$<\cos^n\varphi\cdot n\cdot\operatorname{tg}\varphi\leqslant\frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{n^{(n-2)/2}}.$$

Из доказательства видно, что рассматриваемое неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\varphi$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$.

2.11. Докажем, что если $x, y\geqslant 0$, $x+y\leqslant\dfrac{2}{3}$ и $k\geqslant 2$, $k\in\mathrm{N}$, то

$$x^k(1-x)+y^k(1-y)\leqslant(x+y)^k(1-x-y). \tag{2.6}$$

Если $x+y=0$, то (2.6) верно; если $x+y\neq 0$, то

$$\frac{x^k}{(x+y)^k}(1-x)+\frac{y^k}{(x+y)^k}(1-y)\leqslant\left(\frac{x}{x+y}\right)^2(1-x)+\left(\frac{y}{x+y}\right)^2(1-y)=$$
$$=\frac{(x+y)^2(1-x-y)+xy(3(x+y)-2)}{(x+y)^2}\leqslant 1-x-y.$$

Пусть $x_{i+1}\geqslant x_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n-1$, $x_1+\ldots+x_n=1$ и $n\geqslant 3$; тогда

$$(n-2)x_1+(n-2)x_2\leqslant(x_3+\ldots+x_n)+(x_3+\ldots+x_n)=2-2x_1-2x_2,$$

следовательно, $x_1+x_2\leqslant\dfrac{2}{n}\leqslant\dfrac{2}{3}$.

Таким образом, если числа $x_1,\ldots,x_n$ мы заменим числами $0, x_1+x_2, x_3,\ldots,x_n$, то их сумма опять будет равна 1. При этом

$$\sum_{i=1}^n x_i^k(1-x_i)\leqslant(x_1+x_2)^k(1-x_1-x_2)+x_3^k(1-x_3)+\ldots+x_n^k(1-x_n).$$

Повторяя эти действия конечное число раз, приходим к случаю $n=2$, т. е.

$$\sum_{i=1}^n x_i^k(1-x_i)\leqslant x^k(1-x)+(1-x)^kx,$$

поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k(1-x_i) \leqslant a_k$.

Замечание. Заметим, что

$$a_1 = \max_{[0;1]}(2x(1-x)) = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \max_{[0;1]}(x(1-x)) = \frac{1}{4},$$

$$a_3 = \max_{[0;1]}(x(1-x)(1-2x(1-x))) = \frac{1}{8},$$

$$a_4 = \max_{[0;1]}(x(1-x)(1-3x(1-x))) = \frac{1}{12},$$

$$a_5 = \max_{[0;1]}(x(1-x) - 4(x(1-x))^2 + 2(x(1-x))^3) = \frac{5\sqrt{10}-14}{17}.$$

(См. также упр. 12.12.)

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства (1–4).

1. $\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n} \leqslant \dfrac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}$, где $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$, $n \geqslant 2$.

2. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$, где $a, b, c, d > 0$.

3. $9 \leqslant xy+yz+zx \leqslant \dfrac{9+x^2y^2z^2}{4}$, где $x+y+z = xyz$, $x,\ y,\ z > 0$.

4. а) $\dfrac{1+x_1}{x_1}\dfrac{1+x_2}{x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{x_n} \geqslant (n+1)^n$,

б) $\dfrac{1+x_1}{1-x_1}\dfrac{1+x_2}{1-x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{1-x_n} \geqslant \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$, $n \geqslant 2$.

5. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.

6. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного n-угольника.

7. Докажите, что из всех выпуклых многоугольников, вписанных в данную окружность, наибольшей является сумма квадратов сторон правильного треугольника.

8. Пусть $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные числа, причем $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ $(n \geqslant 4)$. Докажите, что для любого λ $(0 < \lambda < n)$ справедливо следующее неравенство:

$$x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) - \lambda x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \frac{n^2 - \lambda}{n^n}.$$

9. Докажите, что для любых двух треугольников с углами α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ имеет место неравенство

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leqslant \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

10. Докажите, что

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_n)} y_{i_1}^{a_1} y_{i_2}^{a_2} \ldots y_{i_n}^{a_n} \leqslant \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} y_{i_1}^{b_1} y_{i_2}^{b_2} \ldots y_{i_n}^{b_n}$$

(наборы $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получаются в результате всех возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$), где

$$y_1, y_2, \ldots, y_n > 0, \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n,$$
$$a_1 \leqslant b_1, \quad a_1 + a_2 \leqslant b_1 + b_2, \quad \ldots, \quad a_1 + \ldots + a_{n-1} \leqslant b_1 + \ldots + b_{n-1},$$
$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

11. Докажите неравенство

$$n (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

если известно, что из условия $a_i < a < a_j$ следует, что $b_i \leqslant b_j$, где

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

12. Пусть функция f определена и убывает в области $(-\infty; +\infty)$, и кроме этого она нечетная.

Докажите неравенство

$$f(a) f(b) + f(b) f(c) + f(a) f(c) \leqslant 0,$$

где $a + b + c = 0$.

13. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$;

б) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$;

в) $|a_1| + \ldots + |a_n| = S$.

Докажите неравенство $a_n - a_1 \geqslant \dfrac{2S}{n}$.

14. Пусть n — заданное целое число, причем $n \geqslant 2$.

а) Найдите такое наименьшее постоянное C, при котором неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \Big)^4$$

выполняется для всех неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$.

б) Выясните, когда для полученного значения C выполняется равенство.

15. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{1+s-x_1} + \ldots + \dfrac{1}{1+s-x_n} \leqslant 1$, где $s = x_1 + \ldots + x_n$, $x_1 x_2 \ldots$ $\ldots x_n = 1$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$;

б) $\dfrac{1}{a_1^n + \ldots + a_{n-1}^n + n a_1 \ldots a_n} + \dfrac{1}{a_1^n + \ldots + a_{n-2}^n + a_n^n + n a_1 \ldots a_n} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{a_2^n + \ldots + a_n^n + n a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{1}{a_1 \ldots a_n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

§ 3. МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ СРЕДНИМИ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ, ГАРМОНИЧЕСКИМИ И КВАДРАТИЧНЫМИ

При решении некоторых задач и при доказательстве неравенств целесообразно использовать соотношения между средними арифметическим, геометрическим, гармоническим и квадратичным, которые для двух положительных чисел выражаются следующими неравенствами:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \tag{3.1}$$

где выражение $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ называется *средним гармоническим* чисел a и b, $\sqrt{ab}$ — *средним геометрическим*, $\dfrac{a+b}{2}$ — *средним арифметическим*, $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — *средним квадратичным*.

Доказательства неравенств (3.1) приведены в § 1 (упр. 1.2–1.4).

Заметим, что в (3.1) равенства имеют место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Пример 3.1. Доказать неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 3$, где a, b, $c > 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно принять, что $c \geqslant a$, $c \geqslant b$. Используя

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{3.2}$$

получим

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2, \tag{3.3}$$

и $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}-1 = \dfrac{(c-a)(c-b)}{ac} \geqslant 0$; следовательно,

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-1 \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Складывая неравенства (3.3) и (3.4), получим $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 3$.

П р и м е р 3.2. Доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно принять, что $a\geqslant b\geqslant c$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}-\sqrt{\frac{b+c}{a}}\geqslant$$

$$\geqslant 2+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}-\sqrt{\frac{b+c}{a}}\geqslant 2+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{2a}}-\sqrt{\frac{b+c}{a}}=$$

$$=2+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{1+c/a}}+\sqrt{\frac{c}{2}}-\sqrt{b+c}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 2+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{1+c/b}}+\sqrt{\frac{c}{2}}-\sqrt{b+c}\right)=$$

$$=2+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a\,(b+c)}}\,(\sqrt{b+c}-\sqrt{2c})\geqslant 2.$$

Равенство имеет место, если $a=b+c$, $b=a=c$; последнее невозможно. Следовательно, $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

В т о р о й с п о с о б. Воспользуемся неравенствами

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geqslant\frac{2}{1+\dfrac{b+c}{a}}=\frac{2a}{a+b+c},$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}\cdot 1}\geqslant\frac{2}{1+\dfrac{a+c}{b}}=\frac{2b}{a+b+c},$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot 1}\geqslant\frac{2}{1+\dfrac{a+b}{c}}=\frac{2c}{a+b+c}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geqslant 2.$$

Знак равенства имеет место, если во всех трех неравенствах имеется знак равенства, что возможно при выполнении условия

$$1 = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b};$$

это противоречит условию примера. Таким образом,

$$\frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Соотношения (3.1) обобщаются на случай положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ следующим образом:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}, \qquad (3.5)$$

где выражения

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}, \qquad \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}, \qquad \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \qquad \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратичным* чисел $a_1, \ldots, a_n$. Равенства в соотношениях (3.5) имеют место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Пример 3.3. Доказать неравенство

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

где $a_1 > 0, \ \ldots, \ a_n > 0$.

Доказательство. Используя неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

для положительных чисел $x_i = \dfrac{1}{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$ (упр. 2.1), получим неравенство

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}},$$

откуда и получается данное неравенство.

Замечание. $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$, следовательно,

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2. \qquad (3.6)$$

Пример 3.4. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\ldots+\sqrt{1+x_{100}}=100\sqrt{1+\dfrac{1}{100}}, \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_{100}}=100\sqrt{1-\dfrac{1}{100}}. \end{cases}$$

Решение. Воспользовавшись неравенством

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \tag{3.7}$$

(упр. 2.2) для чисел $\sqrt{1+x_1},\ldots,\sqrt{1+x_{100}}$ и $\sqrt{1-x_1},\ldots,\sqrt{1-x_{100}}$, получим

$$\frac{\sqrt{1+x_1}+\ldots+\sqrt{1+x_{100}}}{100} \leqslant \sqrt{\frac{100+(x_1+\ldots+x_{100})}{100}}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\sqrt{1-x_1}+\ldots+\sqrt{1-x_{100}}}{100} \leqslant \sqrt{\frac{100-(x_1+\ldots+x_{100})}{100}}.$$

Из полученных неравенств и заданной системы получаем

$$\sqrt{1+\frac{1}{100}} \leqslant \sqrt{1+\frac{x_1+\ldots+x_{100}}{100}}, \qquad \sqrt{1-\frac{1}{100}} \leqslant \sqrt{1-\frac{x_1+\ldots+x_{100}}{100}}.$$

Получилось, что $x_1+\ldots+x_{100}=1$, откуда следует, что в неравенстве (3.8) имеет место только равенство, т. е. $\sqrt{1+x_1}=\ldots=\sqrt{1+x_{100}}$, или $x_1=\ldots=x_{100}=\dfrac{1}{100}$.

Не трудно убедиться непосредственной подстановкой, что полученные числа удовлетворяют данной системе.

Соотношения между средними арифметическим и средним геометрическим позволяют решить некоторые задачи на нахождение максимальных и минимальных значений.

Замечание 1. Среднее арифметическое положительных чисел $a_1,\ldots,a_n$ с одним и тем же средним геометрическим имеет минимальное значение, когда $a_1=\ldots=a_n$.

Замечание 2. Среднее геометрическое положительных чисел $a_1,\ldots,a_n$ с одним и тем же средним арифметическим имеет максимальное значение, когда $a_1=\ldots=a_n$.

Пример 3.5. Среди треугольников с заданной площадью найти тот, у которого наименьший периметр.

Решение. Обозначим стороны искомого треугольника a, b, c $(a, b, c > 0)$, периметр — $2p$.

Используя формулу Герона и неравенства из упр. 2.1, получим

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3} = p^2\,\frac{\sqrt{3}}{9},$$

откуда получаем $2p \geqslant 2\sqrt{3S\sqrt{3}}$.

Равенство имеет место, когда $a = b = c$. Таким образом, из всех треугольников с заданной площадью наименьший периметр — у равностороннего.

П р и м е р 3.6. Среди треугольников с заданным периметром $2p$ найти тот, у которого наибольшая площадь.

Р е ш е н и е. Обозначим площадь искомого треугольника через S, а стороны через a, b, c $(a, b, c > 0)$. По формуле Герона

$$S = \sqrt{p}\cdot\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Найдем наибольшее значение выражения $(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$.

Так как $(p-a)+(p-b)+(p-c) = p$ постоянно, то согласно замечанию 2 произведение $(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$ принимает наибольшее значение тогда, когда $p-a = p-b = p-c$; отсюда получаем, что $a = b = c$. Таким образом, из всех треугольников с заданным периметром $2p$ наибольшая площадь у равностороннего треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите следующие неравенства (3.1–3.28).

3.1. $(a+b)\,(a+c)\,(b+c) \geqslant 8abc$, где $a, b, c > 0$.

3.2. $(a+b+c-d)\,(b+c+d-a)\,(c+d+a-b)\,(d+a+b-c) \leqslant \leqslant (a+b)\,(b+c)\,(c+d)\,(d+a)$, где $a,\ b,\ c,\ d > 0$.

3.3. а) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + a^2c + ac^2$, где $a, b, c > 0$;

б) $\left(1+\dfrac{4a}{b+c}\right)\left(1+\dfrac{4b}{a+c}\right)\left(1+\dfrac{4c}{a+b}\right) > 25$, где $a, b, c > 0$.

3.4. $\dfrac{\lg(a-1)}{\lg a} < \dfrac{\lg a}{\lg(a+1)}$, где $a > 1$.

3.5. $abc \geqslant (a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)$, где $a, b, c > 0$.

3.6. $x^8 + y^8 \geqslant \dfrac{1}{128}$, если $x + y = 1$.

3.7. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geqslant \dfrac{25}{2}$, если $a, b > 0$ и $a + b = 1$.

3.8. $\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \dfrac{\left(n^2+1\right)^2}{n}$, если $x_1,\ldots,x_n > 0$ и $x_1+\ldots+x_n=1$.

3.9. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc\,(a+b+c)$.

3.10. $x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,(x-y)$, если $xy=1$.

3.11. $\sqrt{6a_1+1}+\sqrt{6a_2+1}+\sqrt{6a_3+1}+\sqrt{6a_4+1}+\sqrt{6a_5+1} \leqslant \sqrt{55}$, если $a_1,\ldots,a_5>0$ и $a_1+\ldots+a_5=1$.

3.12. $6a+4b+5c \geqslant 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$, где $a,b,c \geqslant 0$.

3.13. $2\left(a^4+b^4\right)+17 > 16ab$.

3.14. $\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{a+b-c} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

3.15. $\left(\dfrac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant b^n$, где $n\in\mathrm{N}$, $b>0$.

3.16. а) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, где $n\in\mathrm{N}$;

б) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, где $n\in\mathrm{N}$.

3.17. $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$, где $n=2,3,4,\ldots$

3.18. а) $n\,(n+1)^{1/n} < n+S_n$, где $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, $n = 2,3,4,\ldots$;

б) $n-S_n > (n-1)\,n^{1/(1-n)}$, где $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, $n = 3,4,\ldots$

3.19. $(q^n-1)\,(q^{n+1}+1) \geqslant 2nq^n\,(q-1)$, где $q>1$, $n\in\mathrm{N}$.

3.20. а) $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10$, где $a,b,c,d>0$, $abcd=1$;

б) $\left(a+\dfrac{1}{b}-1\right)\left(b+\dfrac{1}{c}-1\right)\left(c+\dfrac{1}{a}-1\right) \leqslant \left(\dfrac{1+abc}{2\sqrt{abc}}\right)^3$, где $a,b,c>0$.

3.21. $n\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}-(n-1)\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}} \leqslant a_n$, где $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$, $n=3,4,\ldots$

3.22. $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}+\ldots+\sqrt[n]{k_1\ldots k_n} \leqslant$

$$\leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1+\ldots+k_1)(a_2+b_2+\ldots+k_2)\ldots(a_n+b_n+\ldots+k_n)},$$
где $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,\ldots,k_1,\ldots,k_n>0$.

3.23. $a_1+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\ldots+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\leqslant e\,(a_1+\ldots+a_n)$, где $a_1,\ldots,a_n\geqslant 0$.

3.24. $na^k-ka^n\leqslant n-k$, где $n>k$, $n,k\in\mathrm{N}$, $a>0$.

3.25. $\dfrac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\dfrac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\dfrac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geqslant\dfrac{n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$, где $a>0$, $x_i>$ >0, $i=1,\ldots,n$.

3.26. $\sqrt[p]{x_1+1}+\sqrt[p]{x_2+1}+\ldots+\sqrt[p]{x_n+1}\leqslant n+1$, где $x_1,\ldots$ $\ldots,x_n>0$, $x_1+\ldots+x_n=p$, $p\in\mathrm{N}$, $p>1$.

3.27. а) $(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$, где $\alpha\geqslant -1$, $n\in\mathrm{N}$ (*неравенство Бернулли*);

б) в случае $n>1$ $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, где $\alpha\neq 0$ и $\alpha\geqslant -1$, $n\in\mathrm{N}$.

3.28. $\cos^3 t\sin t\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

3.29. Найти наименьшее значение функции
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$
в области $[0;1)$, где $n\in\mathrm{N}$, $n>1$.

3.30. Найти наименьшее значение функции $f(x)=ax^m+\dfrac{b}{x^n}$ в области $(0,\infty)$, где $a,b>0$; $m,n\in\mathrm{N}$.

3.31. Найти в области $[a;b]$ $(0<a<b)$ такую точку x_0, в которой функция $f(x)=(x-a)^2(b^2-x^2)$ принимает свое наибольшее значение в этой области.

3.32. Найти наибольшее значение произведения xyz, если известно, что $x,y,z>0$ и $2x+\sqrt{3}y+\pi z=1$.

3.33. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=$ $=\dfrac{x}{ax^2+b}$, где $a,b>0$.

3.34. Найти наибольшее значение функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x^2+6x+8}+12}{x+3}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2+3)}}{3x^2+4}$.

3.35. Пусть сумма всех шести ребер треугольной пирамиды $PABC$ равна S, а $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$. Найти среди таких пирамид пирамиду с наибольшим объемом.

3.36. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$

3.37. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

3.38. Заданы числа a, b, c, d, e такие, что

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=8, \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16. \end{cases}$$

Найти наибольшее значение e.

3.39. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_3}{x_4}+\dfrac{x_5}{x_6}$, если

$$1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6 \leqslant 1000.$$

3.40. Решить уравнение $x^4+y^4+2=4xy$.

3.41. Решить в целых числах уравнение $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=3$.

РЕШЕНИЯ

3.1. Используя неравенство (3.2) для положительных чисел a и b, a и c, b и c, получим неравенства с положительными членами

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \qquad \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}, \qquad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc},$$

перемножив которые почленно, получим $\dfrac{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}{8} \geqslant abc$.

3.2. Три множителя в левой части неравенства положительны. Если только один множитель в левой части не положителен, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай, когда все четыре множителя положительны. В этом случае воспользовавшись неравенствами (3.2) для пар чисел

$$\begin{array}{lcl} a+b+c-d & \text{и} & b+c+d-a, \\ a+b+c-d & \text{и} & d+a+b-c, \\ b+c+d-a & \text{и} & c+d+a-b, \\ c+d+a-b & \text{и} & d+a+b-c, \end{array}$$

получим следующие неравенства с положительными частями:

$$\sqrt{(a+b+c-d)\,(b+c+d-a)} \leqslant \leqslant \frac{((a+b+c-d)+(b+c+d-a))}{2} = b+c,$$

$$\sqrt{(a+b+c-d)\,(d+a+b-c)} \leqslant \leqslant \frac{((a+b+c-d)+(d+a+b-c))}{2} = a+b,$$

$$\sqrt{(b+c+d-a)\,(c+d+a-b)} \leqslant \leqslant \frac{((b+c+d-a)+(c+d+a-b))}{2} = c+d,$$

$$\sqrt{(c+d+a-b)\,(d+a+b-c)} \leqslant \leqslant \frac{((c+d+a-b)+(d+a+b-c))}{2} = a+d,$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим заданное неравенство.

3.3. а) Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

(см. упр. 3.5.).

б) Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$12abc + a^3 + b^3 + c^3 > a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + b^2c + c^2b,$$

доказательство которого следует из неравенства упр. 3.3, а).

3.4. Рассматриваемое неравенство эквивалентно неравенству

$$\lg(a-1)\lg(a+1) < \lg^2 a \; (a > 1).$$

Когда $\lg(a-1) \leqslant 0$, имеем

$$\lg(a-1)\lg(a+1) \leqslant 0 < \lg^2 a.$$

Если же $\lg(a-1) > 0$, то, воспользовавшись неравенством (3.2), получим неравенство

$$2\sqrt{\lg(a-1)\lg(a+1)} \leqslant \lg(a-1) + \lg(a+1) = \lg(a^2-1) < \lg a^2,$$

следовательно, $\lg(a-1)\lg(a+1) < \lg^2 a$.

3.5. Так как $a, b, c > 0$, то по крайней мере два множителя правой части неравенства положительны. Если только один множитель не положителен, неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда все три множителя правой части неравенства положительны.

Воспользовавшись неравенством $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, можем написать

следующие верные неравенства с положительными частями:

$$\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leqslant \frac{(a+b-c)+(a+c-b)}{2} = a,$$
$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leqslant \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b,$$
$$\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} \leqslant \frac{(a+c-b)+(b+c-a)}{2} = c.$$

Перемножив почленно полученные неравенства, придем к заданному неравенству.

3.6. Имеем

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geqslant \left(\frac{x^4+y^4}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4 \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^8 = \frac{1}{128}.$$

3.7. Так как $a+b=1$, то из (3.2) получим $\dfrac{1}{ab} \geqslant 4$. Следовательно, согласно неравенству (3.7)

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{1+4}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

3.8. Так как $x_1+\ldots+x_n=1$, то из (3.6) получим, что $\dfrac{1}{x_1}+\ldots$ $\ldots+\dfrac{1}{x_n} \geqslant n^2$. Используя неравенство (3.7), получим

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant n\left(\frac{x_1+\frac{1}{x_1}+\ldots+x_n+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2 =$$
$$= n\left(\frac{1+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2 \geqslant n\left(\frac{1+n^2}{n}\right)^2 = \frac{(1+n^2)^2}{n}.$$

3.9. Воспользовавшись неравенством (3.2), можем написать

$$a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2, \qquad b^4+c^4 \geqslant 2b^2c^2, \qquad c^4+a^4 \geqslant 2c^2a^2.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2. \tag{3.9}$$

Опять согласно неравенству (3.2) имеем

$$a^2b^2+b^2c^2 \geqslant 2ab^2c, \qquad b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 2abc^2, \qquad c^2a^2+a^2b^2 \geqslant 2a^2bc.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc\,(a+b+c)\,. \tag{3.10}$$

Из неравенств (3.9) и (3.10) получается, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c)\,.$$

3.10. Воспользовавшись тождеством $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$ и условием $xy = 1$, получим $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + (\sqrt{2})^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,(x - y)$.

3.11. Для любого значения λ согласно неравенству (3.2) имеют место неравенства

$$(6a_i + 1) + \lambda^2 \geqslant 2\lambda\sqrt{6a_i + 1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Складывая полученные неравенства и учитывая условие $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ для $\lambda > 0$, получим

$$\frac{11 + 5\lambda^2}{2\lambda} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{6a_i + 1}.$$

В случае $\lambda = \sqrt{\dfrac{11}{5}}$ имеем $\sqrt{55} \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sqrt{6a_i + 1}$.

3.12. Воспользовавшись неравенством (3.2), получим

$$5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc} \leqslant \frac{5\,(a + b)}{2} + \frac{7\,(a + c)}{2} + \frac{3\,(b + c)}{2} = 6a + 4b + 5c.$$

3.13. Так как $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$, то

$$2\,(a^4 + b^4) + 17 \geqslant 4a^2b^2 + 17 > 4\,(a^2b^2 + 4) \geqslant 16ab.$$

3.14. Записав неравенство (3.6) для чисел

$$\frac{1}{b + c - a} \text{ и } \frac{1}{a - b + c}, \qquad \frac{1}{b + c - a} \text{ и } \frac{1}{a + b - c},$$
$$\frac{1}{a - b + c} \text{ и } \frac{1}{a + b - c},$$

получим

$$\frac{\dfrac{1}{b + c - a} + \dfrac{1}{a - b + c}}{2} \geqslant \frac{1}{c}, \qquad \frac{\dfrac{1}{b + c - a} + \dfrac{1}{a + b - c}}{2} \geqslant \frac{1}{b},$$
$$\frac{\dfrac{1}{a - b + c} + \dfrac{1}{a + b - c}}{2} \geqslant \frac{1}{a}.$$

Складывая почленно полученные неравенства, получим заданное неравенство.

3.15. $1 + \underbrace{b + \ldots + b}_{n} \geqslant (n + 1)\ \sqrt[n+1]{b^n}$, откуда получается заданное неравенство

$$\left(\frac{1 + nb}{n + 1}\right)^{n+1} \geqslant b^n.$$

3.16. а) Записав для чисел $\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}, 1$ неравенство из упр. 2.1, получим

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n};$$

б) записав для чисел $\underbrace{1-\frac{1}{n+1}, \ldots, 1-\frac{1}{n+1}}_{n+1}, 1$ неравенство из упр. 2.1, получим

$$\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

3.17. Согласно неравенству из упр. 2.1 имеем

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

3.18. а) $S_n + n = n + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots$

$$\ldots + \frac{n+1}{n} > n \cdot \sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}} = n\cdot\sqrt[n]{n+1};$$

б) $n - S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n} >$

$$> (n-1)\cdot\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}} = (n-1)\, n^{1/(1-n)}.$$

3.19. Воспользовавшись тождеством

$$q^n - 1 = (q-1)\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1\right)$$

и условием $q>1$, получим неравенство, эквивалентное заданному неравенству,

$$\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1\right)\left(q^{n+1}+1\right) \geqslant 2nq^n. \tag{3.11}$$

Согласно неравенству из упр. 2.1 в случае $n>1$ имеем

$$q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1 \geqslant n\cdot\sqrt[n]{q^{n-1}\cdot q^{n-2}\cdot\ldots\cdot 1} = nq^{(n-1)/2},$$
$$q^{n+1}+1 \geqslant 2q^{(n+1)/2}.$$

Перемножая полученные неравенства, получим (3.11).

3.20. а) $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant$

$$\geqslant 10\cdot \sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2abacadbcbdcd} = 10\cdot \sqrt[10]{(abcd)^5} = 10.$$

б) Так как $a, b, c > 0$, то по крайней мере два множителя левой части неравенства положительны (см. упр. 1.9, а)). В случае, если только один множитель не положителен, неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда все три множителя правой части неравенства положительны.

Заметим, что

$$3+3abc = b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)+c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+$$
$$+bc\left(a-1+\frac{1}{b}\right)+ac\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+ab\left(c-1+\frac{1}{a}\right).$$

Воспользовавшись неравенством из упр. 2.1, получим неравенство

$$3+3abc \geqslant 6\sqrt[6]{a^3b^3c^3\left(\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right)^2},$$

которое эквивалентно заданному неравенству.

3.21. $a_n + \underbrace{\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}+\ldots+\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}}_{n-1} \geqslant$

$$\geqslant n\cdot\sqrt[n]{a_n\underbrace{\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}}_{n-1}},$$

откуда

$$n\cdot\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}-(n-1)\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}} \leqslant a_n.$$

3.22. $\sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}\dfrac{a_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}}+$

$$+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}\frac{b_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}}+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt[n]{\frac{k_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}\frac{k_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}\cdots\frac{k_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{k_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}+\frac{k_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{k_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}\Big)=\frac{1}{n}\Big(\frac{a_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}+$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}+\ldots+\frac{k_1}{a_1+b_1+\ldots+k_1}\Big)+$$
$$+\frac{1}{n}\Big(\frac{a_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}+\frac{b_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{k_2}{a_2+b_2+\ldots+k_2}\Big)+\ldots+\frac{1}{n}\Big(\frac{a_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}+$$
$$+\frac{b_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}+\ldots+\frac{k_n}{a_n+b_n+\ldots+k_n}\Big)=1.$$

3.23. Заметим, что

$$a_1\geqslant\frac{1}{1\cdot 2}\,a_1+\frac{1}{2\cdot 3}\,a_1+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}\,a_1,$$

$$a_2\geqslant\frac{2}{2\cdot 3}\,a_2+\frac{2}{3\cdot 4}\,a_2+\ldots+\frac{2}{n\,(n+1)}\,a_2,\qquad a_n\geqslant\frac{n}{n\,(n+1)}\,a_n,$$

следовательно,

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+2a_2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{a_1+2a_2+\ldots+ka_k}{k\,(k+1)}+\ldots+\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n\,(n+1)}.$$

Докажем, что $e\dfrac{a_1+2a_2+\ldots+ka_k}{k\,(k+1)}\geqslant(a_1\ldots a_k)^{1/k}\quad(k=1,\ldots,n)$.

Действительно, согласно неравенству из упр. 2.1

$$\frac{a_1+2a_2+\ldots+ka_k}{k\,(k+1)}\geqslant\frac{\sqrt[k]{a_1 2a_2\ldots ka_k}}{k+1}=\frac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}\,(a_1\ldots a_k)^{1/k}.$$

Остается доказать, что $\dfrac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}>\dfrac{1}{e}$, или $k!>\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^k$ (см. упр. 7.18).

Таким образом, получилось, что

$$e\,(a_1+\ldots+a_n)\geqslant\sum_{k=1}^{n}e\,\frac{a_1+2a_2+\ldots+ka_k}{k\,(k+1)}\geqslant\sum_{k=1}^{n}(a_1\ldots a_k)^{1/k}.$$

Теперь докажем, что в заданном неравенстве заменить e на меньшее число нельзя. Действительно, пусть

$$c\,(a_1+\ldots+a_n)\geqslant\sum_{k=1}^{n}(a_1\ldots a_k)^{1/k};$$

принимая $a_k=\dfrac{1}{k}\quad(k=1,\ldots,n)$, получим

$$c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k!)^{1/k}}>\sum_{k=8}^{n}\frac{e}{k\cdot\sqrt[k]{k}}\tag{3.12}$$

(здесь использовалось неравенство из упр. 14.18).

С другой стороны, согласно неравенству из упр. 7.17 для $k = 3, 4, \ldots$ имеем

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}}\right)^k > 1 + k\sqrt{\frac{2}{k}} + \frac{k\,(k-1)}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\right)^2 > k,$$

откуда $\sqrt[k]{k} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{k}}$, следовательно,

$$\sum_{k=8}^{n} \frac{e}{k \cdot \sqrt[k]{k}} > \sum_{k=8}^{n} \frac{e}{k\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}}\right)}. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что

$$e\sum_{k=8}^{n} \frac{1}{k\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} < c\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

или

$$e\sum_{k=8}^{n} \frac{1}{k} - e\sum_{k=8}^{n} \frac{\sqrt{\frac{2}{k}}}{k\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}}\right)} < c\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Отсюда получаем

$$e\sum_{k=8}^{n} \frac{1}{k} - e\sum_{k=8}^{n} \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{k}} < c\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

или

$$\alpha_n \cdot e - \sqrt{2}e \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} < c,$$

где

$$\alpha_n = \frac{\sum\limits_{k=8}^{n} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{7} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

Переходя к пределу, получим, что $e \leqslant c$ (см. упр. 7.15 и 7.16).

3.24. $n - k + ka^n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-k} + \underbrace{a^n + \ldots + a^n}_{k} \geqslant$

$$\geqslant n \cdot \sqrt[n]{1 \ldots 1 \cdot \underbrace{a^n \ldots a^n}_{k}} = na^k,$$

откуда $n-k \geqslant na^k - ka^n$.

3.25. $\dfrac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\dfrac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\dfrac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geqslant$

$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}\,\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}\ldots\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}} = \frac{n}{\sqrt[n]{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_n+x_1)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\dfrac{(x_1+x_2)+\ldots+(x_n+x_1)}{n}} = \frac{n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

3.26. Используя неравенство из упр. 2.1 для чисел x_i+1 и $\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p-1}$ $(i=1,\,2,\ldots,n)$, получим

$$\sqrt[p]{x_i+1} = \sqrt[p]{(x_i+1)\cdot\underbrace{1\cdot1\ldots1}_{p-1}} \leqslant \frac{(x_i+1)+(p-1)\cdot1}{p} = 1+\frac{x_i}{p},$$

следовательно,

$$\sqrt[p]{x_1+1}+\sqrt[p]{x_2+1}+\ldots+\sqrt[p]{x_n+1} \leqslant \left(1+\frac{x_1}{p}\right)+\left(1+\frac{x_2}{p}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(1+\frac{x_n}{p}\right) = n+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{p} = n+1.$$

3.27. а) Так как $1+\alpha \geqslant 0$, то достаточно доказать неравенство для случая $1+n\alpha \geqslant 0$. Согласно неравенству из упр. 2.1

$$\sqrt[n]{(1+n\alpha)\cdot\underbrace{1\ldots1}_{n-1}} \leqslant \frac{1+n\alpha+1+\ldots+1}{n} = 1+\alpha, \qquad n>1,$$

следовательно, $1+n\alpha \leqslant (1+\alpha)^n$.

б) См. решение упр. 3.27, а).

3.28. $\cos^6 t\sin^2 t = 27\,\dfrac{\cos^2 t}{3}\,\dfrac{\cos^2 t}{3}\,\dfrac{\cos^2 t}{3}\,(1-\cos^2 t) \leqslant$

$$\leqslant 27\left(\frac{\dfrac{\cos^2 t}{3}+\dfrac{\cos^2 t}{3}+\dfrac{\cos^2 t}{3}+1-\cos^2 t}{4}\right)^4 = \frac{27}{4^4},$$

откуда $|\cos^3 t\,\sin t| \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, следовательно, $\cos^3 t\,\sin t \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

3.29. Используя неравенство (3.2), получим

$$f(x) = (1+x)^{-1/n}+(1-x)^{-1/n} \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{(1+x)^{-1/n}(1-x)^{-1/n}} = \frac{2}{\sqrt[2n]{1-x^2}} \geqslant 2,$$

так как $x \in [0, 1)$. С другой стороны, $f(0) = 2$, следовательно наименьшее значение функции $f(x)$ равно 2.

3.30. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = (m+n)\,\frac{1}{m+n}\left(n\,\frac{ax^m}{n} + m\,\frac{b}{mx^n}\right).$$

Используя неравенство из упр. 2.1, получим

$$f(x) \geqslant (m+n)\,\sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n\left(\frac{b}{mx^n}\right)^m} = (m+n)\,\sqrt[m+n]{\frac{a^n b^m}{n^n m^m}},$$

где равенство имеет место при $\dfrac{ax^m}{n} = \dfrac{b}{mx^n}$, т. е. когда $x = \sqrt[m+n]{\dfrac{bn}{am}}$.

Ответ. $\min\limits_{(0,+\infty)} f(x) = f(x_0) = (m+n)\,\sqrt[m+n]{\dfrac{a^n b^m}{n^n m^m}}$, где $x_0 = \sqrt[m+n]{\dfrac{bn}{am}}$.

3.31. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-a)\,\alpha\,(b-x)\,\beta\,(b+x)}{\alpha\beta},$$

где $\alpha, \beta > 0$. Используя неравенство из упр. 2.1, получим

$$4\sqrt[4]{(x-a)(x-a)\,\alpha\,(b-x)\,\beta\,(b+x)} \leqslant$$
$$\leqslant (x-a) + (x-a) + \alpha\,(b-x) + \beta\,(b+x) =$$
$$= (2-\alpha+\beta)\,x + (\alpha+\beta)\,b - 2a.$$

Правая часть этого неравенства не будет зависеть от x, если $\alpha - \beta = 2$, а равенство имеет место, когда $x - a = \alpha\,(b-x) = \beta\,(b+x)$. Отсюда получим равенства

$$\alpha = \frac{x-a}{b-x}, \qquad \beta = \frac{x-a}{b+x},$$

подставляя которые в равенство $\alpha - \beta = 2$ получим квадратное уравнение $2x^2 - ax - b^2 = 0$, которое имеет единственный положительный корень $x_0 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$. Нетрудно показать, что $x_0 \in [a, b]$. Следовательно, $f(x)$ достигает наибольшего значения в точке x_0 области $[a, b]$.

Ответ. $x_0 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$.

3.32. Представим произведение xyz в виде

$$xyz = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\right)(2x)\,(\sqrt{3}y)\,(\pi z)$$

и запишем неравенство из упр. 2.1 для чисел $2x$, $\sqrt{3}y$ и πz:

$$xyz = (2x)(\sqrt{3}y)(\pi z)\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \leqslant \left(\frac{2x+\sqrt{3}y+\pi z}{3}\right)^3 \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{54\pi\sqrt{3}},$$

где равенство имеет место, когда $2x = \sqrt{3}y = \pi z$. Воспользовавшись условием $2x+\sqrt{3}y+\pi z = 1$, получим $x = \dfrac{1}{6}$, $y = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{1}{3\pi}$.

Ответ. $\dfrac{1}{54\pi\sqrt{3}}$.

3.33. Заметим, что:

$$\begin{aligned} &\text{когда } x<0, \text{ имеем } f(x)<0;\\ &\text{когда } x>0, \text{ имеем } f(x)>0;\\ &\text{когда } x=0, \text{ имеем } f(x)=0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение в области $(0,+\infty)$, а наименьшее значение — в области $(-\infty,0)$.

Первый способ. Неравенство (3.2) для чисел ax^2 и b имеет вид

$$\frac{ax^2+b}{2} \geqslant |x|\cdot\sqrt{ab}, \tag{3.14}$$

где равенство имеет место, когда $ax^2 = b$. Из неравенства (3.14) следует, что когда $x>0$, имеем

$$\frac{x}{ax^2+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Отсюда получается, что наибольшее значение $f(x)$, равное $\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$, функция принимает в точке $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Так как функция $f(x)$ нечетная, то ее наименьшее значение, равное $-\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$, достигается в точке $x = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Второй способ. В области $(0,+\infty)$ функция $f(x)$ совпадает с функцией $g(x) = \dfrac{1}{ax+\dfrac{b}{x}}$, где $a,b>0$. Эта функция принимает свое наибольшее значение в точке, в которой функция $h(x) = ax+\dfrac{b}{x}$ принимает свое наименьшее значение.

Так как произведение $ax \cdot \dfrac{b}{x} = ab$ постоянно, то сумма $ax + \dfrac{b}{x}$ имеет наименьшее значение в случае, когда $ax = \dfrac{b}{x}$, т. е. когда $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Таким образом, получили, что в области $(0, +\infty)$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ и оно равно $\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ находится аналогично первому способу.

3.34. а) Имеем $y = \dfrac{5\sqrt{(x+2)(x+4)}+12}{x+3}$, следовательно, когда $x \geqslant -2$, имеем

$$y = \frac{\sqrt{(25x+50)(x+4)}+12}{x+3} \leqslant \left(\frac{25x+50+x+4}{2}+12\right)\frac{1}{x+3} = \frac{13x+39}{x+3} = 13,$$

и $y = 13$, когда $25x + 50 = x + 4$, т. е. когда $x = -\dfrac{23}{12}$. Когда $x \leqslant -4$, имеем $y < 0$, следовательно, наибольшее значение функции y равно 13.

б) Имеем

$$y = \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+1)\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}\right)\frac{5}{2}}}{3x^2+4} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+1)\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}\right)}}{3x^2+4} \leqslant \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x^2+1+x^2+1+\frac{2}{5}x^2+\frac{6}{5}}{3(3x^2+4)} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\cdot\frac{12x^2+16}{15(3x^2+4)} = \frac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}.$$

Заметим, что $y = \dfrac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$, когда $x^2+1 = \dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{6}{5}$, т. е. когда $x^2 = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, наибольшее значение функции y равно $\dfrac{4}{15}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$.

3.35. Пусть $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$. В этом случае

$$S = x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2} \quad \text{и} \quad V_{PABC} = \frac{1}{6}xyz.$$

Так как

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

то

$$S \geqslant x+y+z+\sqrt{2}\,(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}) \geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt{2}\,\sqrt[3]{\sqrt{xy}\,\sqrt{yz}\,\sqrt{xz}},$$

откуда $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{S}{3(1+\sqrt{2})}\right)^3 \geqslant V$, и так как в случае $x=y=z=\dfrac{S}{3(1+\sqrt{2})}$

$$V=\frac{1}{6}\left(\frac{S}{3(1+\sqrt{2})}\right)^3,$$

то объем пирамиды с ребрами $x=y=z=\dfrac{S}{3(1+\sqrt{2})}$ наибольший.

3.36. Воспользовавшись неравенством (3.2), получим $1 \geqslant z^2+1$, откуда $z=0$, $x=y=1$.

3.37. Заметим, что в неравенстве $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3} \geqslant \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ имеет место равенство, так как $x+y+z=3$ и $x^2+y^2+z^2=3$.

Следовательно, $x=y=z=1$ (см. решение упр. 2.2).

О т в е т. $(1,1,1)$.

3.38. Согласно неравенству $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqslant \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2$ (упр. 2.2)

$$\frac{16-e^2}{4} \geqslant \left(\frac{8-e}{4}\right)^2,$$

следовательно, $5e^2-16e \leqslant 0$, откуда $0 \leqslant e \leqslant \dfrac{16}{5}$.

Когда $a=b=c=d=\dfrac{6}{5}$, имеем $e=\dfrac{16}{5}$, поэтому наибольшее значение e равно $\dfrac{16}{5}$.

3.39. Имеем

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_5}{x_6} \geqslant \frac{1}{x_2}+\frac{x_2}{x_4}+\frac{x_4}{x_6} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_2}\,\frac{x_2}{x_4}\,\frac{x_4}{x_6}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_6}} \geqslant \frac{3}{10}.$$

Когда $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=10$, $x_4=10^2$, $x_5=10^2$, $x_6=10^3$, имеем

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_5}{x_6}=\frac{3}{10},$$

следовательно, наименьшее значение выражения $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_3}{x_4}+\dfrac{x_5}{x_6}$ равно $\dfrac{3}{10}$.

3.40. Запишем неравенство из упр. 2.1 для чисел x^4, y^4, 1, 1:

$$x^4 + y^4 + 1 + 1 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4y^4 \cdot 1 \cdot 1} = 4|x| \cdot |y| \geqslant 4xy;$$

следовательно, $x^4 + y^4 + 2 = 4\sqrt[4]{x^4y^4}$, откуда $x^4 = y^4 = 1$.

Ответ. $(1,1)$, $(-1,-1)$.

3.41. Имеем $(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = 3xyz$, следовательно, $xyz > 0$. Однако $xyz \in Z$, поэтому $xyz \geqslant 1$. Согласно неравенству из упр. 2.1

$$3xyz = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \geqslant 3xyz\sqrt[3]{xyz} \geqslant 3xyz,$$

следовательно, $xyz = 1$ и в неравенстве (2.1) имеет место равенство, поэтому $(xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^2$. Итак $x^2 = y^2 = z^2 = 1$.

Ответ. $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства 1–16.

1. $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, если $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $a, b, p, q > 0$, числа p и q рациональные.

2. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 2$, где $n \in \mathrm{N}$.

3. $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \leqslant 1 + \dfrac{S}{1!} + \ldots + \dfrac{S^n}{n!}$, где $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4. $\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b}\right)\left(1 + \dfrac{1}{c}\right) \geqslant 64$, где $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$.

5. $\sqrt[n]{a^{2n-k}} + \sqrt[n]{a^{2n+k}} \geqslant 3a - 1$, где $a > 0$, $n > k$, $n, k \in \mathrm{N}$.

6. $\dfrac{a^n - 1}{a^n(a-1)} \geqslant n + 1 - a^{n(n+1)/2}$, где $a > 0$; $a \neq 1$.

7. $na^{n+1} + 1 \geqslant a^n(n+1)$, где $a > 0$.

8. $$(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})\ldots(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \geqslant$$
$$\geqslant (\sqrt{n} - \sqrt{k})(\sqrt{n} + \sqrt{k} - 1) + 2,$$

где $n > k$, $n, k \in \mathrm{N}$.

9. $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$, где $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

10. $a_{n+1} + \dfrac{1}{a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\ldots(a_{n+1} - a_n)} \geqslant n + 2$, где $0 <$

$< a_k < a_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

11. $1 + \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, где $0 \leqslant x < 1$.

12. $\sin 2\alpha < \dfrac{2}{3\alpha - \alpha^3}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

13. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^4 + \left(\dfrac{c}{d}\right)^4 + \left(\dfrac{d}{e}\right)^4 + \left(\dfrac{e}{a}\right)^4 \geqslant \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{e} + \dfrac{e}{a}$, где $abcde \neq 0$.

14. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1999} + \left(\dfrac{b}{c}\right)^{1999} + \left(\dfrac{c}{d}\right)^{1999} + \left(\dfrac{d}{a}\right)^{1999} \geqslant \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

15. а) $\sqrt{\dfrac{a_1 + a_2}{a_3}} + \sqrt{\dfrac{a_2 + a_3}{a_4}} + \ldots + \sqrt{\dfrac{a_{n-1} + a_n}{a_1}} + \sqrt{\dfrac{a_n + a_1}{a_2}} \geqslant n\sqrt{2}$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$ и $n > 2$;

б) $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

в) $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x, y, z > 0$.

16. $\left(\dfrac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\dfrac{1}{a_2^2} - 1\right) \ldots \left(\dfrac{1}{a_n^2} - 1\right) \geqslant \left(n^2 - 1\right)^n$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

17. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$(1+u)(1+v)(1+w),$$

если $0 < u, v, w \leqslant \dfrac{7}{16}$, $u + v + w = 1$.

18. Найдите наибольшее значение выражения $x^p y^q$, если $x + y = a$, $x, y > 0$ и $p, q \in \mathrm{N}$.

19. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2c$, если для любого x, где $|x| < 1$, $ax^2 + bx + c \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Указание. Приняв $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, получим $a + 2c \leqslant 2\sqrt{2}$. Когда $a = \sqrt{2}$, $b = 0$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, проверить, что для $|x| < 1$ $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

20. Докажите, что $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$, где $a, b, c > 0$.

Указание. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{1}{3}\frac{b}{c} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}$.

21. Докажите, что $\frac{1+a_1}{1-a_1}\frac{1+a_2}{1-a_2}\ldots\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} \geqslant n^{n+1}$, где $-1 < a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} < 1$ и $a_1+\ldots+a_{n+1} \geqslant n-1$.

Указание. $1+a_i \geqslant (1-a_1)+\ldots+(1-a_{i-1})+(1-a_{i+1})+\ldots+(1-a_{n+1})$.

22. Докажите, что

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3 \geqslant 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4,$$

где $a, b, c, d > 0$.

Указание. $(a+b+c+d)^2 =$

$$= (a+b)(b+c)+(a+b)(d+a)+(b+c)(c+d)+(c+d)(d+a).$$

§ 4. МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА КОШИ–БУНЯКОВСКОГО

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые неравенства, для доказательства которых будет применено неравенство Коши–Буняковского.

Сначала докажем его для чисел a_1, a_2, b_1, b_2.

Пусть даны векторы $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$. Из школьного курса математики известно, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$.

Оценим модуль скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

С другой стороны,

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

или

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)\,. \tag{4.1}$$

Это неравенство является частным случаем неравенства Коши–Буняковского для чисел a_1, a_2, b_1, b_2.

Заметим, что в (4.1) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Обобщение неравенства (4.1) на числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, которое называется *неравенством Коши–Буняковского*, имеет вид

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2\,. \tag{4.2}$$

Докажем неравенство (4.2) для случая, когда

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0.$$

Первый способ. Пусть

$$x_k = \sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_k^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2)},$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае

$$x_{k+1} = \sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + \ldots + b_k^2 + b_{k+1}^2)} =$$

$$= \sqrt{\left(\left(\sqrt{a_1^2+\ldots+a_k^2}\right)^2+a_{k+1}^2\right)\left(\left(\sqrt{b_1^2+\ldots+b_k^2}\right)^2+b_{k+1}^2\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+\ldots+a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\ldots+b_k^2}+a_{k+1}b_{k+1}\right)^2} = x_k + a_{k+1}b_{k+1}.$$

Таким образом, получим $x_{k+1} \geqslant x_k + a_{k+1}b_{k+1}$, где $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$.

Складывая полученные неравенства, получим

$$\sqrt{(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)} \geqslant a_1b_1+\ldots+a_nb_n,$$

или

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Теперь обсудим случай, когда числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n являются произвольными действительными числами. В этом случае

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) =$$
$$= (|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\ldots+|b_n|^2) \geqslant (|a_1b_1|+\ldots+|a_nb_n|)^2 \geqslant$$
$$\geqslant |a_1b_1+\ldots+a_nb_n|^2 = (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2.$$

В т о р о й с п о с о б.

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) - (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 =$$
$$= \sum_{i,j=1;i\geqslant j}^{n} (a_ib_j - b_ia_j)^2 \geqslant 0.$$

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 4.1. Доказать неравенство $\sin\alpha\,\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta \leqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо

$$\sin\alpha\,\sin\beta + 1\cdot\cos\alpha + 1\cdot\cos\beta \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1^2}\,\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta+1^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 2.$$

П р и м е р 4.2. Доказать неравенство $a^3+b^3 > a^2+b^2$, если $a>0$, $b>0$ и $a^2+b^2 > a+b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$(a^3+b^3)(a+b) = ((a^{3/2})^2+(b^{3/2})^2)((a^{1/2})^2+(b^{1/2})^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a^{3/2}a^{1/2}+b^{3/2}b^{2/2})^2 = (a^2+b^2)^2.$$

Поскольку $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \geqslant \dfrac{a^2+b^2}{a+b} > 1$, то $a^3+b^3 > a^2+b^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 4.1–4.19, 4.22, 4.23.

4.1. $a^2+b^2+c^2 \geqslant 14$, если $a+2b+3c \geqslant 14$.

4.2. $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1$, если $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$.

4.3. $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$, где $a, b > c > 0$.

4.4. $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2} \leqslant a^2+b^2+c^2$.

4.5. $\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

4.6.
$$\sqrt{a}(a+c-b)+\sqrt{b}(a+b-c)+\sqrt{c}(b+c-a) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)},$$
где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

4.7. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$, где $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n > 0$.

4.8. $\dfrac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n} \geqslant \left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2$.

4.9. $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_9a_{10}+a_{10}a_1 \geqslant -1$, если $a_1^2+a_2^2+\ldots$ $\ldots+a_{10}^2=1$.

4.10. а) $x^4+y^4 \geqslant x^3y+xy^3$;

б) $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4 \geqslant x_1^3x_2+x_2^3x_3+\ldots+x_{n-1}^3x_n+x_n^3x_1$, где $n \geqslant 2$.

4.11. $\left(|a_1|^3+\ldots+|a_n|^3\right)^2 \leqslant \left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)^3$.

4.12.
$$3(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)+$$
$$+6\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant (a+b+c+x+y+z)^2.$$

4.13. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

4.14.
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5),$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

4.15. а) $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} \leqslant 12$;

б) $a+b+c \leqslant abc+2$, где $a^2+b^2+c^2=2$.

4.16. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{k+1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right) \geqslant n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k$, где $k, n \in \mathrm{N}$, $a_1, \ldots, a_n > 0$.

4.17. $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, где $a, b, c > 0$.

4.18. $\dfrac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n} \geqslant \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k$, где $n, k \in \mathrm{N}$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$.

4.19. $\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

4.20. Найти расстояние точки $A(x_0, y_0)$ от прямой, задаваемой уравнением $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

4.21. Найти наименьшее значение выражения

$$(u-v)^2 + \left(\sqrt{2 - u^2} - \frac{9}{v}\right)^2,$$

если $0 < u < \sqrt{2}$, $v > 0$.

4.22*). $x_1^2 + \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant 4\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$.

4.23. а) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 4\left(\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$;

б) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 2\left(\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

РЕШЕНИЯ

4.1. Из (4.2) имеем

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,(1^2 + 2^2 + 3^2) \geqslant (a + 2b + 3c)^2 \geqslant 14^2,$$

откуда $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

4.2. $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant$

$$\leqslant \sqrt{a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2}\,\sqrt{b^2 + (\sqrt{1-b^2})^2} = 1.$$

---

*) Это неравенство является частным случаем неравенства Харди

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n} a_k^p,$$

где $p > 1$, $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

4.3. $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{c}\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\sqrt{c}\leqslant$
$$\leqslant\sqrt{(\sqrt{c})^2+(\sqrt{b-c})^2}\sqrt{(\sqrt{a-c})^2+(\sqrt{c})^2}=\sqrt{ab}.$$

4.4. $a\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\,b\leqslant$
$$\leqslant\sqrt{a^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2}\sqrt{(\sqrt{a^2+c^2})^2+b^2}=a^2+b^2+c^2.$$

4.5. $\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{b}}\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

4.6. Заметим, что
$$\sqrt{a}\,(a+c-b)+\sqrt{b}\,(a+b-c)+\sqrt{c}\,(b+c-a)=$$
$$=\sqrt{a(a+c-b)}\sqrt{(a+c-b)}+$$
$$+\sqrt{b(a+b-c)}\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(a\,(a+c-b)+b\,(a+b-c)+c\,(b+c-a))}\times$$
$$\times\sqrt{(a+c-b)+(a+b-c)+(b+c-a)}=$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,(a+b+c)}.$$

4.7. $((\sqrt{a_1})^2+\ldots+(\sqrt{a_n})^2)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right)\geqslant$
$$\geqslant\left(\sqrt{a_1}\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\ldots+\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2=n^2.$$

4.8. $(a_1^2+\ldots+a_n^2)\,(\underbrace{1^2+\ldots+1^2}_{n})\geqslant(a_1+\ldots+a_n)^2$, откуда
$$\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2.$$

4.9. $|a_1a_2+\ldots+a_9a_{10}+a_{10}a_1|\leqslant$
$$\leqslant\sqrt{(a_1^2+\ldots+a_9^2+a_{10}^2)\,(a_2^2+\ldots+a_{10}^2+a_1^2)}=1,$$
откуда $a_1a_2+\ldots+a_9a_{10}+a_{10}a_1\geqslant-1$.

4.10. а) $x^4+y^4=\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}\geqslant\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{2x^2y^2}=$
$$=\sqrt{(x^2)^2+(y^2)^2}\sqrt{(xy)^2+(xy)^2}\geqslant x^3y+xy^3.$$

б) Имеем
$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4=\sqrt{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4}\sqrt{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4}\sqrt{x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n^2+x_n^2x_1^2}\geqslant$$

$$\geqslant |x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + \ldots + x_{n-1}^3x_n + x_n^3x_1| \geqslant$$
$$\geqslant x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + \ldots + x_{n-1}^3x_n + x_n^3x_1.$$

4.11. $\left(|a_1^3| + \ldots + |a_n^3|\right)^2 = \left(|a_1|\, a_1^2 + \ldots + |a_n|\, a_n^2\right)^2 \leqslant$
$$\leqslant \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(a_1^4 + \ldots + a_n^4\right) \leqslant \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 =$$
$$= \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^3.$$

4.12. Левая часть неравенства равна
$$3\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = B.$$
Согласно неравенству из упр. 4.8 имеем
$$B \geqslant 3\left(\sqrt{3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2} + \sqrt{3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}\right)^2 = (a+b+c+x+y+z)^2.$$

4.13. $ab + bc + ca \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)} = a^2 + b^2 + c^2.$

4.14. Имеем
$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(a_1^5 + \ldots + a_n^5\right) =$$
$$= \left((\sqrt{a_1})^2 + \ldots + (\sqrt{a_n})^2\right)\left(\left(\sqrt{a_1^5}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{a_n^5}\right)^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(a_1^3 + \ldots + a_n^3\right)^2.$$
Аналогично, $\left(a_1^7 + \ldots + a_n^7\right)\left(a_1^3 + \ldots + a_n^3\right) \geqslant \left(a_1^5 + \ldots + a_n^5\right)^2$. Перемножая полученные неравенства, получим
$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(a_1^7 + \ldots + a_n^7\right) \geqslant \left(a_1^3 + \ldots + a_n^3\right)\left(a_1^5 + \ldots + a_n^5\right).$$

4.15. а) Имеем
$$1\cdot\sqrt{\alpha+1} + 1\cdot\sqrt{2\alpha-3} + 1\cdot\sqrt{50-3\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(1^2+1^2+1^2)\left((\sqrt{\alpha+1})^2 + (\sqrt{2\alpha-3})^2 + (\sqrt{50-3\alpha})^2\right)} = 12.$$

б) Имеем
$$a\,(bc-1) + (b+c)\cdot 1 \leqslant \sqrt{(a^2+(b+c)^2)\,((bc-1)^2+1^2)} =$$
$$= \sqrt{4\,(1-b^2c^2) + 2\,(1+bc)\,b^2c^2} \leqslant 2,$$
так как $bc \leqslant \dfrac{b^2+c^2}{2} \leqslant 1.$

4.16. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^S = A_S$. Из неравенства (4.2) получим
$$A_{k+1}A_{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(k+1)/2}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^{(k-1)/2}\right)^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a^{(k+1)/2} \cdot a^{(k-1)/2}\right)^2 = A_k^2.$$

Аналогично, получим

$$\begin{gathered} A_k \cdot A_{k-2} \geqslant A_{k-1}^2, \\ A_{k-1} \cdot A_{k-3} \geqslant A_{k-2}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2 \cdot A_0 \geqslant A_1^2, \\ A_1 \cdot A_{-1} \geqslant A_0^2. \end{gathered}$$

Перемножая полученные неравенства, получим $A_{k+1} \cdot A_{-1} \geqslant A_k \cdot A_0$, или $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{k+1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right) \geqslant n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k$.

4.17. $(a+b+c)\,(b+c+a) = \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right) \times$
$$\times \left((\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2\right) \geqslant (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})^2,$$

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})^2 (\sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geqslant (\sqrt[4]{abc} + \sqrt[4]{abc} + \sqrt[4]{abc})^4,$$

$$(a+b+c)\,(1+1+1) \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

Перемножая полученные неравенства, получим

$$(a+b+c)^3 \geqslant 3^3 abc, \quad \text{или} \quad \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc.}$$

4.18. Имеем

$$\begin{gathered} A_k \cdot A_{k-2} \geqslant A_{k-1}^2, \\ A_{k-1} \cdot A_{k-3} \geqslant A_{k-2}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2 \cdot A_0 \geqslant A_1^2, \end{gathered}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered} A_k \cdot A_0 \geqslant A_{k-1} \cdot A_1, \\ A_{k-1} \cdot A_0 \geqslant A_{k-2} \cdot A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2 \cdot A_0 \geqslant A_1 \cdot A_1, \\ A_1 \cdot A_0 \geqslant A_0 \cdot A_1. \end{gathered}$$

Перемножая полученные неравенства, получим $A_k \cdot A_0^k \geqslant A_0 \cdot A_1^k$, или $\dfrac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n} \geqslant \left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^k$. Здесь $A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k$.

4.19. $\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right)\geqslant$

$$\geqslant\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}}}\right)^2\geqslant\left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2=$$
$$=(1+\sqrt{2})^2>5.$$

4.20. Пусть $M\,(x,y)$ — некоторая точка прямой, задаваемой уравнением $ax+by+c=0$. Определим наименьшее значение расстояния $AM=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)}$. Согласно неравенству (4.1)

$$(a^2+b^2)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\geqslant\left(a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)\right)^2,$$

откуда $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\geqslant|ax+by-ax_0-by_0|$, или $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\geqslant\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. В последнем неравенстве равенство имеет место, когда $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$.

Решая систему

$$\begin{cases}ax+by+c=0,\\ \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b},\end{cases}$$

получим $x=-a\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}+x_0$, $y=-b\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}+y_0$.

Таким образом, расстояние точки A от данной прямой равно

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4.21. Имеем

$$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2=2-2\left(uv+\frac{9}{v}\sqrt{2-u^2}\right)+v^2+\left(\frac{9}{v}\right)^2\geqslant$$
$$\geqslant 2-2\sqrt{(u^2+(\sqrt{2-u^2})^2)\left(v^2+\left(\frac{9}{v}\right)^2\right)}+v^2+\left(\frac{9}{v}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{v^2+\frac{81}{v^2}}-\sqrt{2}\right)^2\geqslant(\sqrt{2\cdot 9}-\sqrt{2})^2=8.$$

Когда $v=3$, $u=1$, имеем $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2=4+4=8$, следовательно, наименьшее значение данного выражения равно 8.

4.22. Имеем

$$a_1^2 \geqslant a_1^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+a_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+a_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

$$a_2^2 \geqslant a_2^2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+a_2^2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+a_2^2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

....

$$a_n^2 \geqslant a_n^2\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Следовательно,

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant a_1^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+(a_1^2+a_2^2\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+(a_1^2+a_2^2\sqrt{2}+\ldots+a_n^2\sqrt{n})\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Докажем, что

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}(a_1^2+a_2^2\sqrt{2}+\ldots+a_k^2\sqrt{k}) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)^2. \quad (4.3)$$

Согласно неравенству (4.2)

$$(a_1^2+a_2^2\sqrt{2}+\ldots+a_k^2\sqrt{k})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1+a_2+\ldots+a_k)^2.$$

Для доказательства неравенства (4.3) достаточно показать, что

$$\frac{4(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}k^2 > 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Это нетрудно доказать следующим образом. Имеем

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} =$$
$$= 1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 2\sqrt{k}-1.$$

Докажем, что $2\sqrt{k}-1 < \dfrac{4k^2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \dfrac{4k\sqrt{k}}{k+1+\sqrt{k^2+k}}$.
Поскольку

$$\frac{2k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < k \leqslant k+(\sqrt{k}-1)^2 < k+\sqrt{k^2+k}-2\sqrt{k}+1,$$

имеем
$$\frac{2k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < k + \sqrt{k^2+k} - 2\sqrt{k} + 1,$$
или
$$2k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < k + \sqrt{k^2+k} - 2\sqrt{k} + 1,$$
или
$$2\sqrt{k}(k+1+\sqrt{k^2+k}) - (k+1+\sqrt{k^2+k}) < 4k\sqrt{k},$$
откуда $2\sqrt{k} - 1 < \dfrac{4k\sqrt{k}}{k+1+\sqrt{k^2+k}}$.

Докажем, что множитель 4 в правой части данного неравенства нельзя уменьшить. Пусть неравенство
$$x_1^2 + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \leqslant c\,(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$
имеет место при любых $x_1, \ldots, x_n$. Выбирая $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{i}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, получим
$$1 + \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n}\right)^2 \leqslant c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$
Используя неравенство из упр. 14.16, можем написать
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{k}\right)^2 < c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$
откуда $4 - 8\dfrac{\dfrac{1}{1\sqrt{1}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}} < c.$

Переходя к пределу, получим
$$\lim_{n\to\infty}\left(4 - 8\frac{\dfrac{1}{1\sqrt{1}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} c,$$
так как согласно упр. 7.15 и 7.16 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1\sqrt{1}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}} = 0$, следовательно, $4 \leqslant c$.

4.23. б) Имеем
$$\frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$\frac{1}{a_2} > \frac{2^2}{a_2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{2^2}{a_2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\frac{2^2}{a_2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a_n} > \frac{n^2}{a_n}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

откуда

$$2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) > 2\,\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}\right)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Докажем, что

$$2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{k^2}{a_k}\right)\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) > \frac{k}{a_1+\ldots+a_k},$$

или $(a_1+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{k^2}{a_k}\right) > \frac{k^3\,(k+1)^2}{2\,(2k+1)}$. Имеем

$$(a_1+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{k^2}{a_k}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\sqrt{a_1\frac{1}{a_1}}+\ldots+\sqrt{a_k\,\frac{k^2}{a_k}}\right)^2 = \frac{k^2\,(k+1)^2}{4} > \frac{k^3\,(k+1)^2}{2\,(2k+1)}.$$

Таким образом,

$$2\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) >$$
$$> \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{k^2}{a_k}\right)\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) > \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\ldots+a_k}.$$

Теперь докажем, что множитель 2 в правой части данного неравенства нельзя уменьшить. Действительно, пусть

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n} \leqslant c\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Возьмем $a_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, в этом случае

$$\frac{2x_{n+1}-2}{x_n} \leqslant c,$$

где $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Следовательно, $2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}-\frac{1}{x_n}\right) \leqslant c$, или $2 \leqslant c$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства 1–7.

1. $(\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n)^2 \leqslant n^2$.

2. $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$.

3. $\sqrt{a_1 b_1} + \ldots + \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}\sqrt{b_1 + \ldots + b_n}$, где $a_i, b_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

4. $$(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leqslant \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

5. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i}{x_i}\right)$, где $x_i, a_i, b_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

6. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{y_i}\right) \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, где $x_i, y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

7. $$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

8. Найти расстояние точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, задаваемой уравнением $ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

9. Докажите:

а) тождество

$$(a_1c_1 + \ldots + a_nc_n)(b_1d_1 + \ldots + b_nd_n) - (a_1d_1 + \ldots + a_nd_n)(b_1c_1 + \ldots + b_nc_n) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)(c_id_k - c_kd_i);$$

б) неравенство

$$(a_1c_1 + \ldots + a_nc_n)(b_1d_1 + \ldots + b_nd_n) \geqslant \geqslant (a_1d_1 + \ldots + a_nd_n)(b_1c_1 + \ldots + b_nc_n);$$

здесь $b_id_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ или $b_id_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\dfrac{a_1}{b_1} \leqslant \dfrac{a_2}{b_2} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{c_1}{d_1} \leqslant \dfrac{c_2}{d_2} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{c_n}{d_n}$.

10. Докажите, что
$$(p_1q_1 - p_2q_2 - \ldots - p_nq_n)^2 \geqslant (p_1^2 - p_2^2 - \ldots - p_n^2)(q_1^2 - q_2^2 - \ldots - q_n^2),$$
если $p_1^2 \geqslant p_2^2 + \ldots + p_n^2$, $q_1^2 \geqslant q_2^2 + \ldots + q_n^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+y^2}}.$$

12. Докажите, что
$$\sqrt{x^2+xy+y^2}\sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2}\sqrt{x^2+xz+z^2} + \\ + \sqrt{x^2+xy+y^2}\sqrt{x^2+xz+z^2} \geqslant (x+y+z)^2.$$

Указание. Справедливо
$$\sqrt{x^2+xy+y^2}\sqrt{y^2+yz+z^2} = \\ = \sqrt{\left(y+\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}\sqrt{\left(y+\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right)^2} \geqslant \\ \geqslant \left(y+\frac{x}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right) + \frac{3xz}{4}.$$

§ 5. МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

При доказательстве некоторых неравенств целесообразно произвести замену переменных.

Пример 5.1. Доказать неравенства $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$. В этом случае

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\,\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\,\dfrac{1}{\cos^2\beta}} = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta),$$

следовательно, $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta) \leqslant \frac{1}{2}$.

Пример 5.2. Доказать неравенство

$$a^2(1+b^4) + b^2(1+a^4) \leqslant (1+a^4)(1+b^4).$$

Доказательство. Пусть $a^2 = \operatorname{tg}\alpha$, $b^2 = \operatorname{tg}\beta$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta) + \operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha) \leqslant (1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta),$$

что эквивалентно неравенству $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leqslant 2$.

Пример 5.3. Доказать, что если $a, b, c > 0$, $a+b+c = 1$, то

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{1}{9}.$$

Доказательство. Пусть $a = x + \frac{1}{3}$, $b = y + \frac{1}{3}$, $c = z + \frac{1}{3}$, в этом случае

$$a^3 = x^3 + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{27}, \qquad b^3 = y^3 + y^2 + \frac{y}{3} + \frac{1}{27},$$

$$c^3 = z^3 + z^2 + \frac{z}{3} + \frac{1}{27},$$

следовательно,

$$a^3 + b^3 + c^3 = x^2(1+x) + y^2(1+y) + z^2(1+z) + \frac{x+y+z}{3} + \frac{1}{9} =$$

$$= x^2(1+x) + y^2(1+y) + z^2(1+z) + \frac{1}{9} \geqslant \frac{1}{9},$$

так как $x, y, z > -\frac{1}{3} > -1$.

Пример 5.4. Доказать, что если $a, b, c > 0$ и $abc = 1$, то

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $\sqrt[3]{a} = x$, $\sqrt[3]{b} = y$, $\sqrt[3]{c} = z$, в этом случае

$$xyz = 1, \quad \frac{1}{1+a+b} = \frac{xyz}{xyz + x^3 + y^3} \leqslant \frac{xyz}{xyz + xy(x+y)} = \frac{z}{x+y+z};$$

аналогично получим, что

$$\frac{1}{1+b+c} \leqslant \frac{x}{x+y+z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+a+c} \leqslant \frac{y}{x+y+z}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leqslant \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1.$$

Пример 5.5. Доказать, что если $x_1, \ldots, x_n > 0$ и $\frac{1}{x_1} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{x_n} = n$, то $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Доказательство. Пусть $x_i = 1 + y_i$, где $y_i > -1$. Имеем

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2,$$

откуда $y_1 + \ldots + y_n \geqslant 0$.

Согласно неравенству Бернулли (упр. 3.27, а)), учитывая вышесказанное, получим

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

следовательно, $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Пример 5.6. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 1$ и $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $k \in \mathrm{N}$, то

$$\sqrt[k]{a_1 - 1} + \ldots + \sqrt[k]{a_n - 1} \leqslant \frac{(n-1)^{(n-1)/k}}{n^{(n-k)/k}} \sqrt[k]{a_1 \ldots a_n}.$$

Доказательство. Пусть $b_i = \sqrt[k]{(n-1)(a_i - 1)}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $b_1^k < 1, \ldots, b_l^k < 1$, а $b_{l+1}^k \geqslant 1, \ldots, b_n^k \geqslant 1$. Тогда согласно неравенствам из упр. 10.6 и 11.14 имеем

$$\left(1 + \frac{b_1^k - 1}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{b_l^k - 1}{n}\right)\left(1 + \frac{b_{l+1}^k - 1}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{b_n^k - 1}{n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1+\frac{b_1^k+\ldots+b_l^k-l}{n}\right)\left(1+\frac{b_{l+1}^k+\ldots+b_n^k-(n-l)}{n}\right)=$$

$$=\left(\frac{b_1^k+\ldots+b_l^k+\underbrace{1^k+\ldots+1^k}_{n-l}}{n}\right)\left(\frac{\underbrace{1^k+\ldots+1^k}_{l}+b_{l+1}^k+\ldots+b_n^k}{n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right)^k.$$

Заметим, что $1+\dfrac{b_i^k-1}{n}=\dfrac{(n-1)a_i}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$; следовательно,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n a_1\ldots a_n \geqslant \left(\frac{\sqrt[k]{n-1}\,(\sqrt[k]{a_1-1}+\ldots+\sqrt[k]{a_n-1})}{n}\right)^k,$$

откуда $\dfrac{(n-1)^{(n-1)/k}}{n^{(n-k)/k}}\sqrt[k]{a_1\ldots a_n}\geqslant \sqrt[k]{a_1-1}+\ldots+\sqrt[k]{a_n-1}.$

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 5.1–5.5, 5.8–5.12.

5.1. $4\leqslant a^2+b^2+ab+\sqrt{4-a^2}\sqrt{9-b^2}\leqslant 19$, где $0\leqslant a\leqslant 2$ и $0\leqslant b\leqslant 3$.

5.2. $n\sqrt{m-1}+m\sqrt{n-1}\leqslant mn$, где $m,n\geqslant 1$.

5.3. $\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{2mn-n^2}\geqslant m$, где $m>n>0$.

5.4. $x>\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$, где $x\geqslant 1$.

5.5. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geqslant n\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}$, где $n\in \mathrm{N}$.

5.6. Докажите, что среди любых семи чисел можно найти два числа x, y, для которых справедливо неравенство $0\leqslant \dfrac{x-y}{1+xy}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5.7. Докажите неравенство из упр. 4.3.

5.8. $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\leqslant \dfrac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}}+\dfrac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}$.

5.9. а) $\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}\geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}$;

б) $\dfrac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\dfrac{a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant \dfrac{(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)}{(a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n)}$, где $a_i, b_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$.

5.10. $\dfrac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \dfrac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\dfrac{1}{x_2y_2-z_2^2}$, где $x_1, x_2 > 0$ и $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$.

5.11. а) $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{abc}$, где $a, b, c \geqslant 1$;

б) $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}+\sqrt{d-1} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{abcd}$, где a, b, c, $d \geqslant 1$.

5.12. $\dfrac{a_1^k+\ldots+a_n^k}{n} \geqslant \left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^k$, где $k \in \mathrm{N}$ и $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n > 0$.

5.13. На интервале $[a, a+4]$ задана дифференцируемая функция $f(x)$. Докажите, что существует точка x_0 $(x_0 \in [a, a+4])$ такая, что

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

5.14. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$ и $f(a) = f(b) = 0$, $f(x) + f''(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Докажите, что $b - a > \pi$.

5.15. Докажите, что если $a \geqslant \dfrac{1}{2}$, $b \geqslant \dfrac{1}{2}$, то

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}.$$

5.16. Докажите неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3},$$

где $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$ и $x_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5.17. Докажите неравенство

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

РЕШЕНИЯ

5.1. Пусть $a = 2\cos\alpha$, $b = 3\cos\beta$, где $\alpha, \beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$a^2 + b^2 + ab + \sqrt{4-a^2}\sqrt{9-b^2} =$$
$$= 4\cos^2\alpha + 9\cos^2\beta + 6\cos\alpha\cos\beta + 6\sin\alpha\sin\beta =$$

$$= 4\cos^2\alpha + 9\cos^2\beta + 6\cos(\alpha-\beta) \leqslant 4+9+6 = 19.$$

С другой стороны,

$$6\sin\alpha\sin\beta \geqslant 6\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad 6\sin\alpha\sin\beta \geqslant 6\sin^2\beta.$$

Если $6\sin\alpha\sin\beta \geqslant 6\sin^2\alpha$, то

$$4\cos^2\alpha + 9\cos^2\beta + 6\cos\alpha\cos\beta + 6\sin\alpha\sin\beta \geqslant$$
$$\geqslant 4\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha + 9\cos^2\beta + 6\cos\alpha\cos\beta \geqslant 4,$$

если же $6\sin\alpha\sin\beta \geqslant 6\sin^2\beta$, то

$$4\cos^2\alpha + 9\cos^2\beta + 6\cos\alpha\cos\beta + 6\sin\alpha\sin\beta \geqslant 6,$$

следовательно, в обоих случаях $a^2+b^2+ab+\sqrt{4-a^2}\sqrt{9-b^2} \geqslant 4$.

5.2. Пусть $m = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $n = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$, $\alpha, \beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; в этом случае

$$\frac{n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1}}{mn} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\beta}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2} \leqslant 1,$$

следовательно, $n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leqslant mn$.

5.3. Пусть $\dfrac{n}{m} = \sin\alpha$, где $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\frac{\sqrt{m^2-n^2} + \sqrt{2mn-n^2}}{m} = \frac{m\cos\alpha + m\sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}}{m} =$$
$$= \cos\alpha + \sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha} = \cos\alpha + \sqrt{\sin\alpha + \sin\alpha\,(1-\sin\alpha)} \geqslant$$
$$\geqslant \cos\alpha + \sqrt{\sin\alpha} \geqslant \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

следовательно, $\sqrt{m^2-n^2} + \sqrt{2mn-n^2} \geqslant m$.

5.4. Пусть $x = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, где $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда данное неравенство приведется к виду

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} > \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}},$$

или

$$1 > \sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)}. \tag{5.1}$$

Согласно неравенству (3.2)

$$\sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

где равенства не выполняются одновременно. Теперь, складывая эти неравенства, получим неравенство (5.1).

5.5. Сначала докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n+1-k}}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{n+1}},$$

где $k=1,2,\ldots,n$.

Пусть $k=(n+1)\sin^2\alpha$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha}}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{n+1}}.$$

Поскольку

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n+1-k}}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right),$$

то $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant n\sqrt{\frac{2}{n+1}}$.

5.6. Пусть $x_k=\operatorname{tg}\alpha_k$, где $-\frac{\pi}{2}<\alpha_k<\frac{\pi}{2}$, $k=1,\,2,\ldots,\,7$. Разделим интервал $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ на шесть равных частей. Согласно принципу Дирихле из α_k хотя бы два принадлежат одному отрезку, следовательно, $0\leqslant\alpha_i-\alpha_j\leqslant\frac{\pi}{6}$; учитывая последнее, получим

$$0\leqslant\frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}=\operatorname{tg}\,(\alpha_i-\alpha_j)\leqslant\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5.7. Вводя обозначения $a=\frac{c}{\cos^2\alpha}$, $b=\frac{c}{\cos^2\beta}$, где $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, нетрудно после нескольких эквивалентных преобразований получить очевидное неравенство $\sin\,(\alpha+\beta)\leqslant 1$.

5.8. Вводя обозначения $a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=\operatorname{tg}\beta$, $c=\operatorname{tg}\gamma$, неравенство приведем к виду

$$|\sin\,(\alpha-\beta)|\leqslant|\sin\,(\alpha-\gamma)|+|\sin\,(\beta-\gamma)|\,.$$

Доказать последнее можно следующим способом:

$$|\sin\,(\alpha-\beta)|=|\sin\,(\alpha-\gamma)\cos\,(\gamma-\beta)+\sin\,(\gamma-\beta)\cos\,(\alpha-\gamma)|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin\,(\alpha-\gamma)\cos\,(\gamma-\beta)|+|\sin\,(\gamma-\beta)\cos\,(\alpha-\gamma)|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin\,(\alpha-\gamma)|+|\sin\,(\gamma-\beta)|\,.$$

5.9. а) Пусть $\sqrt{\dfrac{a_i}{b_i}} = \operatorname{tg}\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. После некоторых преобразований получим

$$\sqrt[n]{\sin^2\alpha_1 \ldots \sin^2\alpha_n} + \sqrt[n]{\cos^2\alpha_1 \ldots \cos^2\alpha_n} \leqslant 1.$$

Используя неравенство из упр. 2.1, найдем

$$\sqrt[n]{\sin^2\alpha_1 \ldots \sin^2\alpha_n} + \sqrt[n]{\cos^2\alpha_1 \ldots \cos^2\alpha_n} \leqslant \frac{\sin^2\alpha_1 + \ldots + \sin^2\alpha_n}{n} +$$
$$+ \frac{\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2\alpha_i + \cos^2\alpha_i) = 1.$$

б) Пусть $\sqrt{\dfrac{a_i}{b_i}} = \operatorname{tg}\alpha_i$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$. В этом случае имеем

$$\frac{b_1^2\operatorname{tg}^2\alpha_1}{b_1\operatorname{tg}^2\alpha_1 + b_1} + \ldots + \frac{b_n^2\operatorname{tg}^2\alpha_n}{b_n\operatorname{tg}^2\alpha_n + b_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(b_1\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \ldots + b_n\operatorname{tg}^2\alpha_n)(b_1 + \ldots + b_n)}{(b_1\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \ldots + b_n\operatorname{tg}^2\alpha_n) + (b_1 + \ldots + b_n)},$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\sin^2\alpha_i \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\operatorname{tg}^2\alpha_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{\cos^2\alpha_i}},$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\sin^2\alpha_i\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\cos^2\alpha_i}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\operatorname{tg}^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Множитель $b_ib_j\left(\dfrac{\sin^2\alpha_i}{\cos^2\alpha_j} + \dfrac{\sin^2\alpha_j}{\cos^2\alpha_j}\right)$ в левой части этого неравенства не больше множителя $b_ib_j(\operatorname{tg}^2\alpha_i + \operatorname{tg}^2\alpha_j)$ в правой части неравенства, т. е.

$$\frac{\sin^2\alpha_i}{\cos^2\alpha_j} + \frac{\sin^2\alpha_j}{\cos^2\alpha_i} \leqslant \operatorname{tg}^2\alpha_i + \operatorname{tg}^2\alpha_j;$$

это справедливо, поскольку

$$\operatorname{tg}^2\alpha_i + \operatorname{tg}^2\alpha_j - \left(\frac{\sin^2\alpha_i}{\cos^2\alpha_j} + \frac{\sin^2\alpha_j}{\cos^2\alpha_i}\right) = \frac{(\sin^2\alpha_i - \sin^2\alpha_j)^2}{\cos^2\alpha_i\cdot\cos^2\alpha_j} \geqslant 0.$$

5.10. Пусть $z_1 = \sqrt{x_1y_1}\sin\alpha$, $z_2 = \sqrt{x_2y_2}\sin\beta$. Тогда данное неравенство приводится к виду

$$A = \frac{8}{x_1y_1\cos^2\alpha + x_2y_2\cos^2\beta + x_1y_2\cos^2\alpha + x_2y_1\cos^2\beta + B} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{x_1y_1\cos^2\alpha} + \frac{1}{x_2y_2\cos^2\beta},$$

где $B = (\sqrt{x_1y_2}\sin\alpha - \sqrt{y_1y_2}\sin\beta)^2$. Заметим, что

$$A \leqslant \frac{8}{x_1y_1\cos^2\alpha + x_2y_2\cos^2\beta + x_1y_2\cos^2\alpha + x_2y_1\cos^2\beta}, \tag{5.2}$$

с другой стороны,

$$(x_1y_1\cos^2\alpha + x_2y_2\cos^2\beta + x_1y_2\cos^2\alpha + x_2y_1\cos^2\beta)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{x_1y_1\cos^2\alpha} + \frac{1}{x_2y_2\cos^2\beta}\right) = 2 + \left(\frac{x_1y_1\cos^2\alpha}{x_2y_2\cos^2\beta} + \frac{x_2y_2\cos^2\beta}{x_1y_1\cos^2\alpha}\right) +$$
$$+\left(\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}\right) + \left(\frac{x_2\cos^2\beta}{x_1\cos^2\alpha} + \frac{x_1\cos^2\alpha}{x_2\cos^2\beta}\right) \geqslant 8;$$

следовательно, получим неравенство

$$\frac{8}{x_1y_1\cos^2\alpha + x_2y_2\cos^2\beta + x_1y_2\cos^2\alpha + x_2y_1\cos^2\beta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{x_1y_1\cos^2\alpha} + \frac{1}{x_2y_2\cos^2\beta}. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует данное неравенство.

5.11. Пусть $a = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $b = \frac{1}{\cos^2\beta}$, $c = \frac{1}{\cos^2\gamma}$, $d = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, где α, β, γ, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

а) Заданное неравенство принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

или

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Так как

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) =$$
$$= \sin\,(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = B,$$

то, воспользовавшись неравенством (4.1), получим

$$B \leqslant \sqrt{(\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2\alpha\cos^2\beta)(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)} =$$
$$= \sqrt{\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

Теперь докажем, что $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta \leqslant \frac{4}{3}$. Действительно,

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\right)^2=\sin^2(\alpha+\beta)+$$
$$+\frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}\cos^2(\alpha+\beta)\leqslant$$
$$\leqslant\sin^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\cos(\alpha+\beta)|+\frac{1}{4}\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=-\frac{3}{4}\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}|\cos(\alpha+\beta)|=$$
$$=-\frac{3}{4}\left(|\cos(\alpha+\beta)|-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\leqslant\frac{4}{3}.$$

б) Данное неравенство примет вид

$$M=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\varphi(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\varphi)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Нетрудно показать, что

$$M=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma\cos\varphi+\sin(\gamma+\varphi)\cos\alpha\cos\beta.$$

Согласно неравенству (3.2)

$$M\leqslant\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{\cos\gamma+\cos\varphi}{2}\right)^2+\sin(\gamma+\varphi)\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\right)^2.$$

Так как

$$\frac{\cos x+\cos y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\leqslant\cos\frac{x+y}{2},$$

где $x, y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$M\leqslant\sin(\alpha+\beta)\cos^2\frac{\gamma+\varphi}{2}+\sin(\gamma+\varphi)\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}+\sin\frac{\gamma+\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}\leqslant2\cos^2\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{4}\times$$
$$\times\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}=4\cos^3\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{4}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{4}.$$

Так как $\cos^3 t\sin t\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{16}$ (см. упр. 3.28), то $M\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5.12. Пусть $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=a$, $a_i=a+x_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда из условия $a+x_i>0$ получим, что $\frac{x_i}{a}>-1$, следовательно, согласно

неравенству Бернулли

$$\left(1+\frac{x_i}{a}\right)^k \geqslant 1+k\,\frac{x_i}{a} \qquad (i=1,\ldots,n),$$

откуда

$$(a+x_i)^k \geqslant a^k + ka^{k-1}x_i.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$(a+x_1)^k+(a+x_2)^k+\ldots+(a+x_n)^k \geqslant$$
$$\geqslant na^k+ka^{k-1}(x_1+\ldots+x_n)=na^k,$$

поскольку $x_1+\ldots+x_n=a_1+\ldots+a_n-na=0$.

Таким образом, $\dfrac{a_1^k+\ldots+a_n^k}{n} \geqslant \left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^k$.

5.13. Докажем от противного. Предположим, что для любого $x \in \in [a, a+4]$ $f'(x) \geqslant 1+f^2(x)$.

Пусть $\operatorname{arctg} f(x)=g(x)$, откуда $-\dfrac{\pi}{2}<g(x)<\dfrac{\pi}{2}$. Получим

$$\frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)} \geqslant \frac{1}{\cos^2 g(x)},$$

откуда $g'(x) \geqslant 1$. А это означает, что функция $g(x)-x$ не убывает. Следовательно, $g(b)-b \geqslant g(a)-a$, или

$$g(b)-g(a) \geqslant b-a, \tag{5.4}$$

где $b=a+4$.

Так как $g(b),\ g(a) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то

$$g(b)-g(a)<\pi. \tag{5.5}$$

Из неравенств (5.4) и (5.5) и условия $b-a=4$ следует $\pi>4$, что неправильно. Следовательно, существует x_0 такое, что $x_0 \in [a, a+4]$ и $f'(x_0)<1+f^2(x_0)$.

5.14. Без ограничения общности можно предположить, что $a=0$ (в противном случае рассмотрим функцию $f(x-a)$; в этом случае необходимо доказать, что $b>\pi$. Пусть $b \leqslant \pi$. Рассмотрим функцию

$$F(x)=-\frac{\pi}{b}f(x)\cos\frac{\pi}{b}x+f'(x)\sin\frac{\pi}{b}x$$

на отрезке $[0,b]$. Заметим, что $F(0)=F(b)=0$, следовательно, согласно теореме Ролли существует $c \in (0,b)$ такое, что $F'(c)=0$.

Однако

$$F'(c) = \frac{\pi^2}{b^2} f(c) \sin\frac{\pi}{b}c + f''(c)\sin\frac{\pi}{b}c = \sin\frac{\pi}{b}c\left(\frac{\pi^2}{b^2} f(c) + f''(c)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sin\frac{\pi}{b}c\,(f(c) + f''(c)) > 0.$$

Получили, что $F'(c) > 0$, что противоречит равенству $F'(c) = 0$. Следовательно, наше предположение неверно и, таким образом, $b > \pi$.

5.15. Без ограничения общности можно предположить, что $a \geqslant b$. Пусть $a = b \operatorname{tg}\alpha$, где $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. В этом случае данное неравенство принимает вид

$$b^2\,\frac{\cos^2 2\alpha}{4\cos^4\alpha} \geqslant b\,\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha} - b\,\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha},$$

или

$$b\cos^2 2\alpha \geqslant 2\cos^3\alpha(\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha).$$

Для доказательства последнего достаточно показать, что для α из области $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha \geqslant 2\cos^3\alpha(\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha),$$

которое эквивалентно неравенству

$$2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 2\sqrt{2}\cos^3\alpha\left(1 - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

или

$$2\left(1 - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 2\sqrt{2}\cos^3\alpha\left(1 - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Последнее справедливо, так как разность его правой и левой частей

$$2\left(1 - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^3\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos^3\alpha\right) \geqslant 0,$$

так как

$$1 \geqslant \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \quad \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{2}\cos^3\alpha \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

5.16. Пусть $x_i = \sin\alpha_i$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(3\sin\alpha_i - 4\sin^3\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n}\sin 3\alpha_i,$$

следовательно, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\sin 3\alpha_i \leqslant \frac{n}{3}.$

5.17. Без ограничения общности можем считать, что $x, y, z \geqslant 0$. Действительно, достаточно заметить, что

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|^2}+\frac{|y|}{1+|y|^2}+\frac{|z|}{1+|z|^2},$$

$$|x|^2+|y|^2+|z|^2=1.$$

Пусть $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $z=\operatorname{tg}\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Имеем

$$xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2$$

(упр. 4.13), следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\gamma\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \leqslant 1,$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right),$$

поэтому $\alpha+\beta \leqslant \frac{\pi}{2}-\gamma$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot 3\sin\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{3} \leqslant \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(см. упр. 11.1).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства 2–13.

1. Дано, что $a^2+b^2=1$. Докажите следующие неравенства:

а) $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$; б) $|a-b| \leqslant \sqrt{2}$;

в) $|ab| \leqslant \frac{1}{2}$; г) $|a^2b+ab^2| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\left|xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right| \leqslant 1$, где $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

3. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} \leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$, где $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

4. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arcctg} x > 1$, где $x > 0$.

5. $\dfrac{2}{\cos\alpha+\cos\beta}-1\leqslant\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\beta}-1\right)}$, где $\dfrac{\pi}{3}\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

6. $\dfrac{a_1}{1-a_1}+\dfrac{a_2}{1-a_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{1-a_n}\geqslant\dfrac{n\,(a_1+\ldots+a_n)}{n-(a_1+\ldots+a_n)}$, где $0\leqslant a_1,\ldots$ $\ldots,a_n<1$.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\dfrac{3}{2}$, где $a,b,c>0$, $a+b+c=$ $=abc$.

8. $\dfrac{|x-y|}{1+a|x-y|}+\dfrac{|y-z|}{1+a|y-z|}\geqslant\dfrac{|x-z|}{1+a|x-z|}$, где $a>0$.

9. $\dfrac{2x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\dfrac{2y\,(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\dfrac{2z\,(1-z^2)}{(1+z^2)^2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$, где $x,y,z>0$.

10.
$$\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\leqslant\sqrt{1}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+$$
$$+\sqrt{2}(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+\ldots+\sqrt{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}),$$
где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}=0$.

11. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\ldots+\dfrac{1}{1+a_n}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}\geqslant\dfrac{1}{n}$, где $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$.

12. $a+b+c-2\sqrt{abc}\geqslant ab+bc+ca-2abc$, где $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$.

13.
$$\sqrt{a\,(1-b)\,(1-c)}+\sqrt{b\,(1-a)\,(1-c)}+\sqrt{c\,(1-a)\,(1-b)}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\sqrt{abc},$$
где $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$.

14. Найдите все возможные значения выражения $x^2y+y^2z+z^2x$ при условии, что $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=6$.

15. Последовательность (h_n) задана следующим образом:
$$h_1=\frac{1}{2},\quad h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}\quad(n=1,2,\ldots).$$
Докажите, что $h_1+h_2+\ldots+h_n\leqslant 1{,}03$.

16. Докажите, что
$$((x+y)(y+z)(x+z))^2\geqslant xyz(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y),$$
где $x,y,z\geqslant 0$.

Указание. Если $x^2+y^2+z^2 \neq 0$, то можно считать, что $x+y+z=1$. Пусть $x=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, $y=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, $z=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$, где $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда нужно доказать, что

$$((1-x)(1-y)(1-z))^2 \geqslant xyz(1+x)(1+y)(1+z).$$

17. Докажите, что

$$\sqrt{a_1+\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{4(n-2)}}+\ldots+\sqrt{a_{n-2}+\frac{(a_n-a_{n-1})^2}{4(n-2)}}+ \\ +\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n} \leqslant \sqrt{n},$$

где $n \geqslant 3$, $a_1,\ldots,a_n \geqslant 0$ и $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

Указание. $\sqrt{a_{n-1}}=x+t$, $\sqrt{a_n}=x-t$; в этом случае $x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, и левая часть неравенства не больше $\sqrt{(n-2)(1-2x^2)}+2x$.

18. Докажите, что $\max(a_1,\ldots,a_n) \geqslant 2$, где $n>3$, $a_1+\ldots+a_n \geqslant n$, $a_1^2+\ldots+a_n^2 \geqslant n^2$.

Указание. Пусть $a_i=2-b_i$ и $b_i>0$, $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$b_1+\ldots+b_n \leqslant n, \qquad b_1^2+\ldots+b_n^2-4(b_1+\ldots+b_n) \geqslant n(n-4),$$

следовательно,

$$(b-4)(b_1+\ldots+b_n) \geqslant n(n-4),$$

где $b=\max(b_1,\ldots,b_n)$.

19. Докажите, что $\dfrac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2}<\dfrac{1}{4}$, где $0<a<1$, $0<b<1$.

Указание. Пусть $a=\sin^2\alpha$, $b=\sin^2\beta$, $\alpha,\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

§ 6. МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ И ОДНОРОДНОСТИ

При доказательстве некоторых неравенств целесообразно использование свойств симметрии и однородности выражений.

Пример 6.1. Доказать неравенство

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geqslant (x-z)(y-z)(x+y-z), \tag{6.1}$$

где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Доказательство. Преобразовав неравенство (6.1) к виду

$$x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y + 3xyz \geqslant 0,$$

получим для переменных x, y, z симметричное неравенство. Следовательно, можем считать, что $x \geqslant z \geqslant y$; в этом случае

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geqslant 0 \geqslant (x-z)(y-z)(x+y-z),$$

откуда

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geqslant (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

Пример 6.2. Доказать неравенство

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^3 + \ldots + a_n^3)(b_1^3 + \ldots + b_n^3)(c_1^3 + \ldots + c_n^3),$$

где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Заметим, что если переменные $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n$ заменить на переменные $\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n$, где λ — любое положительное число, то получим эквивалентное неравенство. Поэтому λ можем выбрать так, что $(\lambda a_1)^3 + \ldots + (\lambda a_n)^3 = 1$.

Из сказанного следует, что без потери общности можем считать, что

$$a_1^3 + \ldots + a_n^3 = b_1^3 + \ldots + b_n^3 = c_1^3 + \ldots + c_n^3 = 1,$$

следовательно, остается доказать, что $a_1b_1c_1 + \ldots + a_nb_nc_n \leqslant 1$.

Действительно, имеем

$$a_ib_ic_i \leqslant \frac{a_i^3 + b_i^3 + c_i^3}{3}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(упр. 2.1). Складывая полученные неравенства, приходим к неравенству $a_1b_1c_1 + \ldots + a_nb_nc_n \leqslant 1$.

Пример 6.3. Доказать неравенство $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>$ >2, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Доказательство. Без потери общности можем считать, что $a+b+c=1$. Заметим, что $\sqrt{\dfrac{a}{1-a}}\geqslant 2a$, причем равенство имеет место, когда $a=\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}>$$
$$>2a+2b+2c=2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите следующие неравенства.

6.1. $abc\geqslant(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)$, где $a>0$, $b>0$, $c>$ >0.

6.2. $(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+\ldots+b_n^2)$.

6.3. $(a+b)^2\,(a^2+b^2)^2\ldots(a^n+b^n)^2\geqslant(a^{n+1}+b^{n+1})^n$, где $a>0$, $b>0$.

6.4. $(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha)^\beta\leqslant(a_1^\beta+\ldots+a_n^\beta)^\alpha$, где $0<\beta<\alpha$, $a_1,\ldots,a_n>0$.

6.5. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

6.6. $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{a+c+d}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b+d}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}}>2$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

6.7. $\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leqslant\sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

6.8. $2\sqrt{ab+bc+ac}\leqslant\sqrt{3}\,\sqrt[3]{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}$, где $a>0$, $b>$ >0, $c>0$.

6.9. $8\,(x^3+y^3+z^3)^2\geqslant 9\,(x^2+yz)\,(y^2+xz)\,(z^2+xy)$, где $x>0$, $y>0$, $z>0$.

6.10. а) $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geqslant 1$;

б) $a^3+b^3+c^3+abcd \geqslant \min\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right)$, где $a,b,c \geqslant 0$ и $a+b+$ $+c=1$.

6.11. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \frac{1}{n}\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, где $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $n\geqslant 2$.

6.12. $a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+$ $+c^2d^2$, где $a,b,c,d \geqslant 0$.

6.13. $\frac{a_1^3}{b_1}+\ldots+\frac{a_n^3}{b_n} \geqslant 1$, где $a_i, b_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$, и $\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)^3=b_1^2+\ldots+b_n^2$.

РЕШЕНИЯ

6.1. Без ограничения общности можем считать, что $a\leqslant b\leqslant c$. Остается заметить, что данное неравенство эквивалентно неравенству

$$(b-c)^2(b+c-a) \geqslant a(a-b)(c-a).$$

Последнее получается следующим образом:

$$(b-c)^2(b+c-a) \geqslant 0 \geqslant a(a-b)(c-a).$$

6.2. Если $a_1^2+\ldots+a_n^2 \neq 0$ и $b_1^2+\ldots+b_n^2 \neq 0$, то без ограничения общности, можем считать, что $a_1^2+\ldots+a_n^2=1$, $b_1^2+\ldots+b_n^2=1$.

Имеем $-\frac{a_i^2+b_i^2}{2} \leqslant a_ib_i \leqslant \frac{a_i^2+b_i^2}{2}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Складывая эти неравенства, получим $-1\leqslant a_1b_1+\ldots+a_nb_n\leqslant 1$, откуда

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant 1=\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right).$$

Если $a_1^2+\ldots+a_n^2=0$ или $b_1^2+\ldots+b_n^2=0$, то доказательство очевидно.

6.3. Без ограничения общности можно считать, что $a^{n+1}+b^{n+1}=$ $=1$. Следовательно, $0<a<1$, $0<b<1$ и $a^i+b^i\geqslant a^{n+1}+b^{n+1}=1$ $(i=1,\ldots,n)$. Из последнего получим

$$(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)^2\ldots(a^n+b^n)^2 \geqslant 1=\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)^n.$$

6.4. Без ограничения общности можем считать, что $a_1^\beta+\ldots+a_n^\beta=$ $=1$, откуда $0<a_i\leqslant 1$ $(i=1,\ldots,n)$. Из условия $\alpha>\beta$ получаем $a_i^\alpha \leqslant a_i^\beta$ $(i=1,\ldots,n)$, следовательно,

$$a_1^\alpha+\ldots+a_n^\alpha < a_1^\beta+\ldots+a_n^\beta=1,$$

откуда

$$\left(a_1^\alpha+\ldots+a_n^\alpha\right)^\beta \leqslant 1=\left(a_1^\beta+\ldots+a_n^\beta\right)^\alpha.$$

6.5. Без ограничения общности, можем считать, что $a+b+c=1$. Заметим, что если $0<x<1$, то $\dfrac{x}{1-x} \geqslant \dfrac{9x-1}{4}$; следовательно,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{9a-1}{4}+\frac{9b-1}{4}+\frac{9c-1}{4}=\frac{3}{2}.$$

6.6. Без ограничения общности можем считать, что $a+b+c+d= =1$. Имеем

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{a+c+d}}+\sqrt{\frac{c}{a+b+d}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c+}}=$$
$$=\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}+\sqrt{\frac{d}{1-d}}>2a+2b+2c+2d=2.$$

6.7. Без ограничения общности можем считать, что $d=1$. Используя неравенства из упр. 2.1 и 2.2, имеем

$$\sqrt[3]{\frac{abc+ab+bc+ac}{4}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\left(\frac{ab+bc+ac}{3}\right)^3}+ab+bc+ac}{4}}=A,$$

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac+a+b+c}{6}} \geqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ac+\sqrt{3\,(ab+bc+ac)}}{6}}=B.$$

Докажем, что $B \geqslant A$.

Пусть $ab+bc+ac=3t^2$. В таком случае нетрудно убедиться, что неравенство $B \geqslant A$ эквивалентно неравенству $(t-1)^2\,(t+2) \geqslant 0$.

6.8. Без ограничения общности, можем считать, что

$$ab+bc+ac=1. \tag{6.2}$$

Необходимо доказать неравенство $(b+c)\,(a+b)\,(a+c) \geqslant \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$.

Пусть $a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=\operatorname{tg}\beta$, $c=\operatorname{tg}\gamma$, где $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Из условия (6.1) получим $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, следовательно,

$$(b+c)\,(a+b)\,(a+c)=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Остается доказать, что $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, если $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

Действительно, оценим произведение $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$:

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\,(\alpha+\beta) + \cos\,(\alpha-\beta)\right)\cos\gamma \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\sin\gamma\right)\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sin\gamma\right)^3\left(1-\sin\gamma\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+\sin\gamma\right)^3\left(3-3\sin\gamma\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sin\gamma+1+\sin\gamma+1+\sin\gamma+3-3\sin\gamma}{4}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

6.9. Без ограничения общности можем считать, что

$$x^3+y^3+z^3=1. \tag{6.3}$$

В этом случае имеем

$$A=\left(x^2+yz\right)\left(y^2+xz\right)\left(z^2+xy\right)=2\left(xyz\right)^2+xyz+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3.$$

Так как $x^3+y^3+z^3=1$, то

$$xyz\leqslant\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\leqslant\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{3}=\frac{1}{3},$$

следовательно, $A\leqslant\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$.

6.10. а) Докажите, что после раскрытия скобок в правой части неравенства $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geqslant(a+b+c)^3$ получим эквивалентное неравенство

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$

которое уже было доказано (см. пример 6.1).

б) Если $d\geqslant\frac{15}{4}$, то в этом случае

$$a^3+b^3+c^3+abcd\geqslant a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}abc=$$
$$=\frac{1}{4}\left(4a^3+4b^3+4c^3+15abc\right)\geqslant\frac{1}{4}.$$

Если $d<\frac{15}{4}$, опять согласно 6.10, а) и неравенству

$$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

имеем

$$27\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\geqslant\frac{15}{4}\left(1-27abc\right),$$

откуда

$$27\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\geqslant d\left(1-27abc\right),$$

или

$$a^3+b^3+c^3+abcd \geqslant \frac{1}{9}+\frac{d}{27}.$$

6.11. Без ограничения общности можем считать, что $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Необходимо доказать, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)(a_1^2+\ldots+a_n^2)-\frac{2}{\sqrt{n}}(n-1)\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+$$
$$+2a_1a_2+\ldots+2a_1a_{n-1}+2a_1a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n \geqslant (n-1)^2,$$

или

$$(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}-1\right)^2+2a_1a_2+\ldots+2a_1a_{n-1}+$$
$$+2a_1a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n \geqslant n(n-1).$$

Доказательство последнего получается с использованием неравенства из упр. 4.1:

$$a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_{n-1}+a_1a_n+\ldots+a_{n-1}a_n \geqslant$$
$$\geqslant C_n^2 \sqrt[C_n^2]{(a_1a_2\ldots a_n)^{n-1}} = C_n^2.$$

6.12. Без ограничения общности можем считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$. Имеем

$$A = a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2-c^2d^2 =$$
$$=(a^2-b^2)(a^2-c^2-d^2)+2bcd(a-b)+(b^2+cd-c^2-d^2)^2+2cd(c-d)^2 =$$
$$=(a-b)\left(a(a^2-d^2)-b(c-d)^2\right)+a(a-b)(ab-c^2)+(b^2+cd-c^2-d^2)^2+$$
$$+2cd(c-d)^2.$$

Так как $a-b \geqslant 0$, $a(a^2-d^2) \geqslant b(a-d)^2 \geqslant b(c-d)^2$ и $ab \geqslant c^2$, то, следовательно, $A \geqslant 0$.

6.13. Пусть $\sqrt[3]{b_i} = c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$c_1^6+\ldots+c_n^6 = (a_1^2+\ldots+a_n^2)^3$$

и нужно доказать, что $\dfrac{a_1^3}{c_1^3}+\ldots+\dfrac{a_n^3}{c_n^3} \geqslant 1$.

Без ограничения общности можем считать, что $a_1^2+\ldots+a_n^2 = 1$, тогда $c_1^6+\ldots+c_n^6 = 1$.

Согласно неравенству (8.4) (см. § 8) имеем

$$\frac{a_1^3}{c_1^3}+\ldots+\frac{a_n^3}{c_n^3} = \frac{a_1^4}{a_1c_1^3}+\ldots+\frac{a_n^4}{a_nc_n^3} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)^2}{a_1c_1^3+\ldots+a_nc_n^3} = \frac{1}{a_1c_1^3+\ldots+a_nc_n^3} \geqslant 1,$$

так как согласно неравенству (4.2) (см. § 4)

$$1 = (a_1^2+\ldots+a_n^2)(c_1^6+\ldots+c_n^6) \geqslant \left(a_1c_1^3+\ldots+a_nc_n^3\right)^2;$$

следовательно, $a_1c_1^3+\ldots+a_nc_n^3 \leqslant 1$, а значит, $\dfrac{a_1^3}{b_1}+\ldots+\dfrac{a_n^3}{b_n} \geqslant 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства.

1. $(a-b)^2 \geqslant (a-c)(c-b)$.

2. а) $\dfrac{\ln z-\ln y}{z-y} < \dfrac{\ln z-\ln x}{z-x} < \dfrac{\ln y-\ln x}{y-x}$, где $0<x<y<z$;

б) $a^bb^cc^dd^a \geqslant b^ac^bd^ca^d$, где $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$.

3. $$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+x_4+\ldots+x_n}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

где $n\geqslant 2, x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

4. $a^3+b^3+c^3+6abc \geqslant \dfrac{1}{4}(a+b+c)^3$, где $a,b,c\geqslant 0$.

5. $a^2(2b+2c-a)+b^2(2a+2c-b)+c^2(2a+2b-c) \geqslant 9abc$, где a,b,c — длины сторон некоторого треугольника.

6. а) $$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)},$$

где $a_i, b_i > 0$, $i=1,2,\ldots,n$;

б) $\sqrt[n]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!} \geqslant 1$, где $n\geqslant 2$, $n\in \mathrm{N}$;

в) $\sqrt[n]{F_{n+1}} > 1+\dfrac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$, где $n\geqslant 2$, $n\in\mathrm{N}$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n=1,2,\ldots$;

г) $\sqrt[n]{C_{2n+1}^n} > 2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right)$, где $n=2,3,\ldots$;

д) $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n) \geqslant n^{n/2}$, где $n\geqslant 2$, $a_1,\ldots,a_n>0$, $a_1a_2\ldots a_n=1$.

7. $x^2(x^2-1)^2+y^2(y^2-1)^2-(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1) \geqslant 0$.

8. $x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + 2xyz(x+y+z-2) \geqslant 0$.

У к а з а н и е. Докажите, что

$$x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + 2xyz(x+y+z-2) =$$
$$= x^2(x-1)^2 + \bigl(y(y-1) - z(z-1)\bigr)^2 + 2xyz(x+y-1)(x+z-1).$$

9. $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\times$
$\times(x_2-x_5) + \ldots + (x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4) \geqslant 0$.

10. $0 \leqslant ab+bc+ac-abc \leqslant 2$, где $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2+abc = 4$.

У к а з а н и е. Заметим, что $\min(a, b, c) \leqslant 1$, и без ограничения общности можно считать, что $(a-1)(b-1) \geqslant 0$.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

В данном параграфе будут рассмотрены неравенства, при доказательстве которых удобно пользоваться методом математической индукции, в основе которого лежит следующий принцип.

Данное утверждение справедливо для всех натуральных значений n, которые не меньше p, если:

а) оно справедливо в случае $n = p$;

б) из справедливости данного утверждения для произвольного $n = k$ $(k \geqslant p)$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Пример 7.1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+n} \geqslant \frac{11}{30},$$

где $n > 1$, $n \in \mathrm{N}$.

Доказательство. В случае $n = 2$ имеем $\dfrac{11}{30} \geqslant \dfrac{11}{30}$.

Предположим, что данное неравенство справедливо при $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+k} \geqslant \frac{11}{30}. \tag{7.1}$$

Покажем, что данное неравенство справедливо также в случае $n = k + 1$.

При $n = k + 1$ неравенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2(k+1)+1} + \frac{1}{2(k+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)+(k+1)} \geqslant \frac{11}{30}.$$

Прибавляя к обеим сторонам (7.1) выражение

$$\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2},$$

получим

$$\frac{1}{2k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+3} \geqslant \frac{11}{30} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}.$$

Так как $\dfrac{1}{3k+1} + \dfrac{1}{3k+2} + \dfrac{1}{3k+3} - \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2} > 0$ (упр. 1.19), то

$$\frac{1}{2k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+3} \geqslant \frac{11}{30}.$$

Таким образом, оба условия метода математической индукции удовлетворены. Следовательно, данное неравенство справедливо для натуральных значений n $(n > 1)$.

П р и м е р 7.2. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1, \tag{7.2}$$

где $n=2,3,\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если это неравенство попытаться доказать аналогично примеру 7.1, то это нам не удастся. Как при доказательстве этого неравенств, так и при доказательстве некоторых других неравенств метод математической индукции целесообразно применить к другому неравенству (строгому или расширенному), из которого следует справедливость данного неравенства.

Для доказательства данного неравенства докажем неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}, \tag{7.3}$$

из которого следует справедливость (7.2).

При $n=2$ получим следующее правильное неравенство: $\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2}$.

Предположим, что неравенство (7.3) справедливо при $n=k$ $(k\geqslant 2)$, и покажем, что оно справедливо в случае $n=k+1$. При $n=k$ имеем неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}.$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства $\frac{1}{(k+1)^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k+1}$, то имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k+1};$$

последнее совпадает с рассматриваемым неравенством в случае $n=k+1$, следовательно, данное неравенство справедливо для всех натуральных значений n, которые не меньше 2.

Часто встречаются неравенства, при доказательстве которых метод математической индукции применяется в несколько ином виде:

а) доказывается справедливость данного неравенства для натуральных значений n, равных $n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots$, где $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$;

б) из справедливости данного неравенства при произвольном $n=k$ $(k\geqslant 2)$ следует, что оно справедливо при $n=k-1$.

П р и м е р 7.3. Доказать неравенство

$$\frac{x_1 \ldots x_n}{(x_1 + \ldots + x_n)^n} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_n)}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_n))^n},$$

где $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем неравенство для значений n, равных $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^k, \ldots$

При $n = 2$ имеем справедливое неравенство

$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} \leqslant \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)}{((1 - x_1) + (1 - x_2))^2}$$

(упр. 1.20).

Предположим, что в случае $n = 2^k$ данное неравенство справедливо. Докажем его справедливость при $n = 2^{k+1}$. Имеем

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_p x_{p+1} \ldots x_{2p}}{(x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^{2p}} =$$

$$= \frac{x_1 \ldots x_p}{(x_1 + \ldots + x_p)^p} \, \frac{x_{p+1} \ldots x_{2p}}{(x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^p} \times$$

$$\times \frac{(x_1 + \ldots + x_p)^p (x_{p+1} + \ldots + x_{2p})^p}{(x_1 + \ldots + x_{2p})^{2p}} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_p)}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_p))^p} \times$$

$$\times \frac{(1 - x_{p+1}) \ldots (1 - x_{2p})}{((1 - x_{p+1}) + \ldots + (1 - x_{2p}))^p} \left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_p}{p} \, \dfrac{x_{p+1} + \ldots + x_{2p}}{p}}{\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_p}{p} + \dfrac{x_{p+1} + \ldots + x_{2p}}{p} \right)^2} \right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_p))^p ((1 - x_{p+1}) + \ldots + (1 - x_{2p}))^p} \times$$

$$\times \left(\frac{\left(1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_p}{p}\right)\left(1 - \dfrac{x_{p+1} + \ldots + x_{2p}}{p}\right)}{\left(\left(1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_p}{p}\right) + \left(1 - \dfrac{x_{p+1} + \ldots + x_{2p}}{p}\right)\right)^2} \right)^p =$$

$$= \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_{2p}))^{2p}},$$

где $p = 2^k$. Таким образом, получили неравенство

$$\frac{x_1 \ldots x_{2p}}{(x_1 + \ldots + x_{2p})^{2p}} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_{2p}))^{2p}},$$

следовательно, в случае $n = 2^t$ данное неравенство доказано. Теперь докажем, что если данное неравенство справедливо для m, то оно выполняется также в случае $m - 1$, где $m \geqslant 2$. Имеем

$$\frac{x_1 \ldots x_m}{(x_1 + \ldots + x_m)^m} \leqslant \frac{(1 - x_1) \ldots (1 - x_m)}{((1 - x_1) + \ldots + (1 - x_m))^m}.$$

Принимая $x_m = \dfrac{x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m-1}$, где согласно упр. 1.10 $x_m \leqslant \dfrac{1}{2}$, получим

$$\frac{x_1 \ldots x_{m-1} \dfrac{x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m-1}}{\left(x_1 + \ldots + x_{m-1} + \dfrac{x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m-1}\right)^m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-x_1) \ldots (1-x_{m-1}) \left(1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m-1}\right)}{\left((1-x_1) + \ldots + (1-x_{m-1}) + \left(1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_{m-1}}{m-1}\right)\right)^m},$$

откуда и следует

$$\frac{x_1 \ldots x_{m-1}}{(x_1 + \ldots + x_{m-1})^{m-1}} \leqslant \frac{(1-x_1) \ldots (1-x_{m-1})}{((1-x_1) + \ldots + (1-x_{m-1}))^{m-1}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 7.1–7.4, 7.6, 7.7, 7.10, 7.11, 7.13–7.20.

7.1. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, где $n \in \mathrm{N}$.

7.2. а) $\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n} \leqslant \dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$, где $a \geqslant 0$;

б) $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}} < 3$, где $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$.

7.3. $x_1^2 + 3x_2^2 + \ldots + (2n-1)\, x_n^2 \leqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2$, где $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$.

7.4. а) $|\sin\,(x_1 + \ldots + x_n)| \leqslant |\sin x_1| + \ldots + |\sin x_n|$;

б) $\sin\,(x_1 + \ldots + x_n) \leqslant \sin x_1 + \ldots + \sin x_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi]$.

7.5. Доказать, что:

а) если функция $f(x)$ определена в области $[0, a)$ (или $[0, +\infty)$) и для произвольных $x \geqslant y \geqslant z$ из этой области, $f\,(x) - f\,(y) + f\,(z) \geqslant f\,(x - y + z)$ и $f\,(0) \leqslant 0$, то для любых чисел $a > x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$f\,(x_1) - f\,(x_2) + \ldots + (-1)^{n-1} f\,(x_n) \geqslant$$
$$\geqslant f\Big(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{n-1} x_n\Big);$$

б) $\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{tg} x_n \geqslant$

$$\geqslant \operatorname{tg}\left(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{n-1} x_n\right),$$

где $\dfrac{\pi}{2} > x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$;

в) $a_1^r - a_2^r + a_3^r - \ldots + (-1)^{n-1} a_n^r \geqslant \left(a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n\right)^r$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$.

7.6. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)$, где $x_1, \ldots, x_5 > 0$.

7.7. $\dfrac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant (x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \cdot \max(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.

7.8. Доказать теорему 11.1 (§ 11).

7.9. Доказать теорему 11.2 (§ 11).

7.10. а) $a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n \leqslant na_1 \ldots a_n$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$;

б) $a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n \geqslant na_1 \ldots a_n$, где $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant 1$.

7.11. $\dfrac{a_2^2}{a_1} + \dfrac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} \geqslant 4(a_n - a_1)$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$.

7.12. Доказать:

а) если функция $f(x)$ определена в области I и является выпуклой (см. § 11), то

$$(x_2 + x_1)(f(x_2) - f(x_1)) + (x_3 + x_2)(f(x_3) - f(x_2)) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n + x_{n-1})(f(x_n) - f(x_{n-1})) \geqslant (x_n + x_1)(f(x_n) - f(x_1)),$$

где $n \geqslant 2$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in I$;

б) неравенство $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \geqslant a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$;

в) неравенство $x_1^{x_2} x_2^{x_3} \ldots x_n^{x_1} \geqslant x_2^{x_1} x_3^{x_2} \ldots x_n^{x_{n-1}} x_1^{x_n}$, где $x_n \geqslant x_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant x_1 > 0$, $n \geqslant 3$;

г) неравенство

$$\frac{a(c-b)}{(c+b)(2a+b+c)} + \frac{b(a-c)}{(a+c)(2b+a+c)} + \frac{c(b-a)}{(b+a)(2c+b+a)} \leqslant 0,$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

7.13. $\dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} + \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} \geqslant 2\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, где

$$\frac{a_k + a_{k+2}}{2} \geqslant a_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad n \geqslant 2.$$

7.14. а) $(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})\, n \geqslant \dfrac{a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{n+1}$, где $a_k \geqslant \geqslant \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$, $n \in \mathrm{N}$.

б) $\dfrac{1 + a^2 + \ldots + a^{2n}}{a + a^3 + \ldots + a^{2n-1}} \geqslant \dfrac{n+1}{n}$, где $a > 0$, $n \in \mathrm{N}$.

7.15. $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} > \ln(n+1)$, где $n \in \mathrm{N}$.

7.16. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant 3 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, где $n \in \mathrm{N}$.

7.17. $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha + \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^2$, где $\alpha \geqslant 0$, $n \in \mathrm{N}$.

7.18. $k! \geqslant \left(\dfrac{k+1}{e}\right)^k$, где $k \in \mathrm{N}$.

7.19. $\sum\limits_{i=0}^{n} |\sin 2^i x| \leqslant 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

7.20. $\cos\alpha + \dfrac{\cos 2\alpha}{2} + \ldots + \dfrac{\cos n\alpha}{n} \geqslant -\dfrac{1}{2}$, где $n \in \mathrm{N}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

7.21. Каждое число $a_1, a_2, \ldots, a_n$ больше 1 и $|a_{k+1} - a_k| < 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Докажите, что сумма $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1}$ меньше $2n - 1$.

7.22. Пусть $1 = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1}$. Докажите, что:

а) $\dfrac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \ldots + \dfrac{\sqrt{x_{n+1} - x_n}}{x_{n+1}} \leqslant \dfrac{\sqrt{4n-3}}{2}$, где $n \in \mathrm{N}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \ldots + \dfrac{\sqrt{x_{n+1} - x_n}}{x_{n+1}} < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, где $x_2, x_3, \ldots \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathrm{N}$.

7.23. Докажите, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqslant \pi$, то

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1} + \ldots + \frac{\cos\beta_n}{\sin\alpha_n} \leqslant \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \ldots + \frac{\cos\alpha_n}{\sin\alpha_n}.$$

РЕШЕНИЯ

7.1. Данное неравенство справедливо при $n=1$: $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4}}$. Предположим, что оно справедливо в случае $n = k$, и покажем его справедливость в случае $n=k+1$.

При $n=k$ имеем неравенство $\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$. Умножая обе части этого неравенства на $\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}$, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2},$$

и, учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$ (упр. 1.21), получим

$$\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}.$$

Следовательно, данное неравенство справедливо для любых натуральных значений n.

7.2. а) Данное неравенство справедливо в случае $n=1$:

$$\sqrt{a} \leqslant \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Предположим, что неравенство $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{k} \leqslant \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ справедливо. Поскольку

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{k+1} = \sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}_{k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{a+\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2},$$

то данное неравенство справедливо также в случае $n=k+1$, следовательно, оно будет справедливо при любом натуральном n.

б) Неравенство $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\ldots\sqrt{n}}} < k+1$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $k \in \mathrm{N}$, докажем методом математической индукции по $p = n-k$ (n считаем постоянным).

В случае $p = 0$ имеем неравенство $\sqrt{n} < n + 1$, доказательство которого очевидно. Предположим, что оно справедливо в случае $p = n - m$, и покажем его справедливость в случае $p = n - m + 1 = n - (m - 1)$.

Действительно, в случае $p = n - m$ имеем неравенство

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\ldots\sqrt{n}}} < m + 1,$$

откуда и получаем неравенство

$$\sqrt{(m-1)\sqrt{m\sqrt{(m+1)\ldots\sqrt{n}}}} < \sqrt{(m-1)(m+1)} < m.$$

Следовательно, неравенство $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\ldots\sqrt{n}}} < k + 1$ справедливо при значениях $1 \leqslant k \leqslant n$; $k \in \mathrm{N}$.

Когда $k = 2$, получаем неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3$, которое совпадает с данным неравенством.

7.3. В случае $n = 1$ получаем справедливое неравенство $x_1^2 \leqslant x_1^2$. Предположим, что неравенство

$$x_1^2 + 3x_2^2 + \ldots + (2k-1)\,x_k^2 \leqslant (x_1 + \ldots + x_k)^2$$

справедливо. Прибавляя к обеим частям этого неравенства $(2k+1)\,x_{k+1}^2$, получим неравенство

$$x_1^2 + 3x_2^2 + \ldots + (2k-1)\,x_k^2 + (2k+1)\,x_{k+1}^2 \leqslant \\ \leqslant (x_1 + \ldots + x_k)^2 + (2k+1)\,x_{k+1}^2. \quad (7.4)$$

Докажем неравенство

$$(x_1 + \ldots + x_k)^2 + (2k+1)\,x_{k+1}^2 \leqslant (x_1 + \ldots + x_{k+1})^2, \quad (7.5)$$

которое эквивалентно

$$(2k+1)\,x_{k+1}^2 \leqslant (x_1 + \ldots + x_{k+1})^2 - (x_1 + \ldots + x_k)^2 = \\ = (2\,(x_1 + \ldots + x_k) + x_{k+1})\,x_{k+1},$$

или справедливому неравенству

$$0 \leqslant x_{k+1}\,(2\,(x_1 + \ldots + x_k) - 2kx_{k+1}) = \\ = 2x_{k+1}\,((x_1 - x_{k+1}) + \ldots + (x_k - x_{k+1})),$$

так как согласно условию задачи $0 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Следовательно, из (7.4) и (7.5) получаем неравенство

$$x_1^2 + 3x_2^2 + \ldots + (2k-1)\,x_k^2 + (2k+1)\,x_{k+1}^2 \leqslant (x_1 + \ldots + x_{k+1})^2,$$

которое является заданным неравенством при $n = k+1$. Таким образом, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

7.4. а) В случае $n = 2$ имеем $|\sin(x_1 + x_2)| \leqslant |\sin x_1| + |\sin x_2|$.

Действительно, так как $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$ и $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то

$$|\sin(x_1 + x_2)| \leqslant |\sin x_1 \cos x_2| + |\sin x_2 \cos x_1| \leqslant |\sin x_1| + |\sin x_2|.$$

Предположим, что данное неравенство имеет место в случае $n = k$, и покажем, что оно будет справедливо также в случае $n = k+1$. Действительно, имеем

$$|\sin((x_1 + \ldots + x_k) + x_{k+1})| \leqslant |\sin(x_1 + \ldots + x_k)| + |\sin x_{k+1}| \leqslant \leqslant |\sin x_1| + \ldots + |\sin x_{k+1}|.$$

б) Поскольку при $x \in [0, \pi]$ $\sin x \geqslant 0$, то согласно п. а) данного упражнения получаем

$$\sin x_1 + \ldots + \sin x_n \geqslant |\sin(x_1 + \ldots + x_n)| \geqslant \sin(x_1 + \ldots + x_n).$$

7.5. а) Сначала докажем данное неравенство для значений $n = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots$

В случае $n = 1$ имеем неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_1)$.

Предположим, что данное неравенство имеет место в случае $n = 2k-1$, и покажем, что оно имеет место и в случае $n = 2k+1$. Имеем

$$f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{2k-1}) \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + x_{2k-1}),$$

следовательно,

$$f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{2k-1}) - f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}) \geqslant \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + x_{2k-1}) - f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}).$$

Заметим, что

$$x_1 \geqslant x = x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + x_{2k-1} \geqslant y = x_{2k} \geqslant z = x_{2k+1} \geqslant 0,$$
$$(x - y = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{2k-1} - x_{2k})).$$

Следовательно, $f(x) - f(y) + f(z) \geqslant f(x - y + z)$.

Таким образом,

$$f(x_1) - f(x_2) + \ldots + f(x_{2k-1}) - f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}) \geqslant \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + x_{2k-1}) - - f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}) \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + x_{2k-1} - x_{2k} + x_{2k+1}),$$

откуда следует, что данное неравенство справедливо в случае произвольных нечетных n.

Теперь рассмотрим случай $n = 2k$. Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2k}$. Выберем $x_{2k+1} = 0$; в этом случае

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - \ldots + f(x_{2k}) + f(0) \geqslant \\ \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots - x_{2k} + 0),$$

или

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - \ldots - f(x_{2k}) \geqslant f(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots - x_{2k}),$$

так как $f(0) \leqslant 0$.

б) Докажем, что

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \geqslant \operatorname{tg}(x - y + z),$$

где $\dfrac{\pi}{2} > x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$.

Неравенство запишем в виде

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \geqslant \operatorname{tg}(x - y + z) - \operatorname{tg} z,$$

или

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} \geqslant \frac{\sin(x-y)}{\cos z \cos(x - y + z)}.$$

Когда $x = y$, доказательство очевидно; если же $x \neq y$, то данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\cos z \cos(x - y + z) \geqslant \cos x \cos y,$$

которое справедливо, так как $0 \leqslant z \leqslant y < \dfrac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant x - y + z \leqslant \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$. Поскольку $f(0) = 0$ и имеет место условие из упр. 7.5, а), то данное неравенство справедливо.

в) Решение получается из неравенств из упр. 7.5, а) и упр. 9.34.

7.6. Докажем более общее неравенство

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1), \qquad (7.6)$$

где $n \geqslant 4$, $x_1, \ldots, x_n > 0$.

В случае $n = 4$

$$(x_1 + \ldots + x_4)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1),$$

так как

$$(x_1 + \ldots + x_4)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) = \\ = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geqslant 0.$$

Предположим, что (7.6) справедливо в случае $n = k$, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

Пусть $\max(x_1, \ldots, x_{k+1}) = x_i$. В этом случае

$$(x_1 + \ldots + (x_{i-2} + x_{i-1}) + x_i + \ldots + x_{k+1})^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots \ldots + x_{i-3}(x_{i-2} + x_{i-1}) + (x_{i-2} + x_{i-1})x_i + x_ix_{i+1} + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) > 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{i-3}x_{i-2} + x_{i-2}x_i + x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{i-3}x_{i-2} + x_{i-2}x_{i-1} + x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1)$$

(считаем, что $x_0 = x_{k+1}$, $x_{-1} = x_k$).

7.7. В случае $n = 1$ получается справедливое неравенство $\frac{1}{2}x_1^2 \leqslant \leqslant x_1^2$. Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $n = k$, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

В случае $n = k$ имеем

$$\frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_k)^2 \leqslant (x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k)\max(x_1, \ldots, x_k).$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства выражение

$$x_{k+1}(x_1 + \ldots + x_k) + \frac{x_{k+1}^2}{2},$$

получим слева $\frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_{k+1})^2$, а в правой части получим выражение

$$(x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k)\max(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}(x_1 + \ldots + x_k) + \frac{x_{k+1}^2}{2},$$

которое не больше $(x_1 + 2x_2 + \ldots + (k+1)x_{k+1})\max(x_1, \ldots, x_{k+1})$.

Действительно, так как

$$\max(x_1, \ldots, x_k) \leqslant \max(x_1, \ldots, x_{k+1}) = c,$$

$$\frac{x_{k+1}^2}{2} \leqslant x_{k+1}^2 \leqslant x_{k+1} \cdot c,$$

то

$$(x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k)\max(x_1, \ldots, x_n) + x_{k+1}(x_1 + \ldots + x_k) + \frac{x_{k+1}^2}{2} \leqslant \leqslant (x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k) \cdot c + x_{k+1} \cdot kc + x_{k+1} \cdot c = = (x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k + (k+1)x_{k+1}) \cdot c.$$

Следовательно, данное неравенство справедливо при любых натуральных значениях n.

7.8. Сначала докажем, что для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ из области I имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right). \qquad (7.7)$$

В случае $n = 2$ неравенство (7.7) совпадает с условием теоремы (11.1).

Предположим, что в случае $n = k$ неравенство (7.7) справедливо, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

Рассмотрим выражение

$$f(x_1) + \ldots + f(x_k) + f(x_{k+1}) + (k-1) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right) = A:$$

$$A = (f(x_1) + \ldots + f(x_k)) + f(x_{k+1}) + \\ + \underbrace{f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right)}_{k-1 \text{ членов}} \geqslant$$

$$\geqslant kf\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) + kf\left(\frac{x_{k+1} + (k-1)\dfrac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}}{k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2kf\left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k} + \left(x_{k+1} + (k-1)\dfrac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right)\dfrac{1}{k}}{2}\right) =$$

$$= 2kf\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right).$$

Таким образом, получили

$$f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1}) + (k-1) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right) \geqslant \\ \geqslant 2kf\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right),$$

откуда $\dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{k+1} \geqslant f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right)$.

Следовательно, неравенство (7.7) доказано.

Теперь докажем неравенство (11.3). Пусть $\alpha_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$, где $p_i, q_i \in \mathrm{N}$. Обозначим наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$ через q. В этом случае $\dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{l_i}{q}$, где $l_i \in \mathrm{N}$.

Оценим левую сторону рассматриваемого неравенства:

$$\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) = \frac{l_1 f(x_1) + \ldots + l_n f(x_n)}{q} = B.$$

Применяя неравенство (7.7) к числам

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{l_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{l_2}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{l_n},$$

общее число которых равно q, так как $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, получим

$$B \geqslant f\left(\frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n}{q}\right) = f\left(\alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n\right).$$

7.9. В случае $n = 2$ неравенство (11.7) совпадает с условиями теоремы 11.2 (11.5).

Предположим, что неравенство (11.7) справедливо в случае $n = k$ и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$, т. е.

$$\beta_1 f\left(a_1\right) + \ldots + \beta_k f\left(a_k\right) + \beta_{k+1} f\left(a_{k+1}\right) \geqslant f\left(\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{k+1} a_{k+1}\right),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1} \geqslant 0$ и $\beta_1 + \ldots + \beta_{k+1} = 1$, а $a_1, \ldots, a_n \in I$.

Действительно,

$$\beta_1 f\left(a_1\right) + \ldots + \beta_k f\left(a_k\right) + \beta_{k+1} f\left(a_{k+1}\right) =$$
$$= \left(\beta_1 + \ldots + \beta_k\right)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \ldots + \beta_k} f\left(a_1\right) + \ldots + \frac{\beta_k}{\beta_1 + \ldots + \beta_k} f\left(a_k\right)\right) +$$
$$+ \beta_{k+1} f\left(a_{k+1}\right) \geqslant \left(\beta_1 + \ldots + \beta_k\right) f\left(\frac{\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k}{\beta_1 + \ldots + \beta_k}\right) +$$
$$+ \beta_{k+1} f\left(a_{k+1}\right) \geqslant f\left(\left(\beta_1 + \ldots + \beta_k\right)\frac{\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k}{\beta_1 + \ldots + \beta_k} + \beta_{k+1} a_{k+1}\right) =$$
$$= f\left(\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k + \beta_{k+1} a_{k+1}\right).$$

Здесь мы воспользовались неравенством (11.7) при $n = k$, заменив x_i на a_i, а α_i на $\dfrac{\beta_i}{\beta_1 + \ldots + \beta_k}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Следовательно, неравенство (11.7) имеет место при любом натуральном значении n.

7.10. а) В случае $n = 1$ получается справедливое неравенство $a_1 \leqslant a_1$. Предположим, что в случае $n = k$ данное неравенство справедливо, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

При $n = k$ имеем $a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k \leqslant k a_1 \ldots a_k$.

С другой стороны, согласно условию задачи имеем $1 \leqslant a_{k+1}$. Перемножив эти два неравенства, получим

$$a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k \leqslant k a_1 \ldots a_k a_{k+1}.$$

Согласно условию имеем также справедливое неравенство

$$a_{k+1}^{k+1} \leqslant a_1 \ldots a_{k+1}.$$

Складывая полученные неравенства, имеем

$$a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k + a_{k+1}^{k+1} \leqslant k a_1 \ldots a_{k+1} + a_1 \ldots a_{k+1} = (k+1)\, a_1 \ldots a_{k+1}$$

Следовательно, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

б) В случае $n = 1$ получается справедливое неравенство $a_1 \geqslant a_1$. Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $n = k$, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

В случае $n = k$ имеем $a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k \geqslant ka_1 \ldots a_k$.

С другой стороны, согласно условию задачи имеем $1 \geqslant a_{k+1}$. Перемножив эти два неравенства, получим

$$a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k \geqslant ka_1 \ldots a_k a_{k+1}.$$

Согласно условию имеем также справедливое неравенство $a_{k+1}^{k+1} \geqslant a_1 \ldots a_{k+1}$. Складывая полученные неравенства, имеем

$$a_1 + a_2^2 + \ldots + a_k^k + a_{k+1}^{k+1} \geqslant (k+1)\, a_1 \ldots a_{k+1}.$$

Таким образом, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

7.11. В случае $n = 2$ имеем справедливое неравенство

$$\frac{a_2^2}{a_1} \geqslant 4\,(a_2 - a_1) \qquad \left(a_2^2 - 4a_1a_2 + 4a_1^2 = (a_2 - 2a_1)^2 \geqslant 0\right).$$

Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $n = k$, и покажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$.

В случае $n = k$ имеем неравенство

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{a_{k-1}} \geqslant 4\,(a_k - a_1)\,.$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства $4\,(a_{k+1} - a_k)$, получим

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{a_{k-1}} + 4\,(a_{k+1} - a_k) \geqslant 4\,(a_{k+1} - a_1)\,.$$

Остается показать, что

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{a_{k-1}} + \frac{a_{k+1}^2}{a_k} \geqslant \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{a_{k-1}} + 4\,(a_{k+1} - a_k)\,.$$

Действительно, неравенство эквивалентно справедливому неравенству $\dfrac{a_{k+1}^2}{a_k} \geqslant 4\,(a_{k+1} - a_k)$, или $(a_{k+1} - 2a_k)^2 \geqslant 0$.

Таким образом, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

7.12. а) В случае $n = 2$ имеем справедливое неравенство

$$(x_2 + x_1)\,(f\,(x_2) - f\,(x_1)) \geqslant (x_2 + x_1)\,(f\,(x_2) - f\,(x_1))\,.$$

В случае $n = k$ имеем неравенство

$$(x_2 + x_1)\,(f\,(x_2) - f\,(x_1)) + (x_3 + x_2)\,(f\,(x_3) - f\,(x_3)) + \ldots$$
$$\ldots + (x_k + x_{k-1})\,(f\,(x_k) - f\,(x_{k-1})) \geqslant (x_k + x_1)\,(f\,(x_k) - f\,(x_1))\,.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства

$$(x_{k+1} + x_k)\,(f\,(x_{k+1}) - f\,(x_k))\,,$$

получим

$$(x_2+x_1)(f(x_2)-f(x_1))+(x_3+x_2)(f(x_3)-f(x_2))+\ldots$$
$$\ldots+(x_k+x_{k-1})(f(x_k)-f(x_{k-1}))+$$
$$+(x_{k+1}+x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k))\geqslant$$
$$\geqslant(x_k+x_1)(f(x_k)-f(x_1))+(x_{k+1}+x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k)).$$

Для доказательства справедливости неравенства в случае $n=k+1$ достаточно доказать следующее неравенство:

$$(x_k+x_1)(f(x_k)-f(x_1))+(x_{k+1}+x_k)(f(x_{k+1})-f(x_k))\geqslant$$
$$\geqslant(x_{k+1}+x_1)(f(x_{k+1})-f(x_1)),$$

или

$$(x_{k+1}-x_k)f(x_1)+(x_k-x_1)f(x_{k+1})\geqslant(x_{k+1}-x_1)f(x_k). \qquad (7.8)$$

Поскольку функция $f(x)$ выпуклая, то

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_1}f(x_1)+\frac{x_k-x_1}{x_{k+1}-x_1}f(x_{k+1})\geqslant$$
$$\geqslant f\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_1}x_1+\frac{x_k-x_1}{x_{k+1}-x_1}x_{k+1}\right)=f(x_k),$$

откуда и получим неравенство (7.8).

Следовательно, мы доказали справедливость данного неравенства в случае $n=k+1$. Таким образом, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n $(n>1)$.

б) Неравенство а) данного упражнения можно переписать в следующем виде:

$$x_nf(x_1)+x_1f(x_2)+x_2f(x_3)+\ldots+x_{n-1}f(x_n)\geqslant$$
$$\geqslant x_2f(x_1)+x_3f(x_2)+\ldots+x_nf(x_{n-1})+x_1f(x_n),$$

где, принимая $f(x)=-\sqrt{x}$, получим

$$a(-\sqrt{c})+c(-\sqrt{b})+b(-\sqrt{a})\geqslant b(-\sqrt{c})+a(-\sqrt{b})+c(-\sqrt{a});$$

отсюда

$$a\sqrt{c}+c\sqrt{b}+b\sqrt{a}\leqslant b\sqrt{c}+a\sqrt{b}+c\sqrt{a}.$$

в) Рассмотрим функцию $f(x)=-\ln x$. Согласно неравенству а) данного упражнения имеем

$$x_n(-\ln x_1)+x_1(-\ln x_2)+\ldots+x_{n-1}(-\ln x_n)\geqslant$$
$$\geqslant x_2(-\ln x_1)+\ldots+x_n(-\ln x_{n-1})+x_1(-\ln x_n),$$

или

$$x_1^{x_n}x_2^{x_1}\ldots x_n^{x_{n-1}}\leqslant x_1^{x_2}x_2^{x_3}\ldots x_{n-1}^{x_n}x_n^{x_1}.$$

г) Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{x}{(a+b+c-x)(a+b+c+x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b+c-x}-\frac{1}{a+b+c+x}\right),$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+b+c-x)^2}+\frac{1}{(a+b+c+x)^2}\right).$$

Если $0\leqslant x\leqslant a$, то

$$f''(x)=\frac{1}{(a+b+c-x)^3}-\frac{1}{(a+b+c+x)^3}\geqslant 0,$$

откуда

$$af(c)+cf(b)+bf(a)\geqslant bf(c)+af(b)+cf(a),$$

или

$$a\frac{c}{(a+b)(a+b+2c)}+c\frac{b}{(a+c)(a+c+2b)}+b\frac{a}{(b+c)(b+c+2a)}\geqslant$$
$$\geqslant b\frac{c}{(a+b)(a+b+2c)}+a\frac{b}{(a+c)(a+c+2b)}+c\frac{a}{(b+c)(b+c+2a)}.$$

7.13. Заметим, что данное неравенство эквивалентно неравенству

$$(a_1+\ldots+a_{n-1})\,n(n+1)+(a_1+\ldots+a_{n-1})\,n(n-1)+$$
$$+(a_n+a_{n+1})\,n(n-1)\geqslant 2(n^2-1)(a_1+\ldots+a_{n-1})+2(n^2-1)\,a_n,$$

или

$$2(a_1+\ldots+a_{n-1})+a_{n+1}n(n-1)\geqslant(n^2+n-2)\,a_n, \tag{7.9}$$

которое докажем методом математической индукции.

В случае $n=2$ получаем справедливое неравенство $2a_1+2a_3\geqslant\geqslant 4a_2$. Предположим, что оно справедливо также в случае $n=k$:

$$2(a_1+\ldots+a_{k-1})+k(k-1)\,a_{k+1}\geqslant(k^2+k-2)\,a_k, \tag{7.10}$$

и докажем, что оно справедливо также в случае $n=k+1$.

Добавив к обеим частям неравенства (7.10) выражение

$$2a_k+(k+1)\,ka_{k+2}-k(k-1)\,a_{k+1},$$

получаем

$$2(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k)+(k+1)\,ka_{k+2}\geqslant$$
$$\geqslant(k^2+k)\,a_k+(k^2+k)\,a_{k+2}-k(k-1)\,a_{k+1}=$$
$$=(k^2+k)(a_k+a_{k+2})-k(k-1)\,a_{k+1}\geqslant$$
$$\geqslant(k^2+k)\cdot 2a_{k+1}-k(k-1)\,a_{k+1}=(k^2+3k)\,a_{k+1}.$$

Таким образом, получили

$$2(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k)+(k+1)\,ka_{k+2}\geqslant(k^2+3k)\,a_{k+1}.$$

Следовательно, неравенство (7.9) справедливо при всех натуральных значениях n.

7.14. а) Данное неравенство запишем в виде

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} \geqslant \frac{n}{(n+1)} (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n})$$

и докажем его методом математической индукции.

В случае $n = 1$ имеем справедливое неравенство $a_1 \geqslant \dfrac{a_0 + a_2}{2}$.

Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $n = k$, и докажем, что оно справедливо также в случае $n = k + 1$, т. е. имеем справедливое неравенство

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} \geqslant \frac{k}{k+1} (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k}),$$

или

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k+1} \geqslant \frac{k}{k+1} (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k}) + a_{2k+1}.$$

Докажем неравенство

$$\frac{k}{k+1}(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k}) + a_{2k+1} \geqslant \frac{k+1}{k+2}(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k} + a_{2k+2}),$$

или

$$a_{2k+1} \geqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)} (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k}) + \frac{k+1}{k+2} a_{2k+2}.$$

Поскольку $a_{2k+1} \geqslant \dfrac{a_{2k} + a_{2k+2}}{2}$, то последнее неравенство будет доказано, если мы докажем неравенство

$$\frac{(a_{2k} + a_{2k+2})}{2} \geqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)} (a_0 + \ldots + a_{2k}) + \frac{k+1}{k+2} a_{2k+2},$$

или

$$\frac{k(k+3)}{2} a_{2k} - \frac{k(k+1)}{2} a_{2k+2} \geqslant a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k-2},$$

для доказательства которого снова воспользуемся методом математической индукции.

В случае $k = 1$ получаем справедливое неравенство $2a_2 - a_4 \geqslant a_0$, так как

$$a_2 \geqslant \frac{a_1 + a_3}{2} \geqslant \frac{1}{2} \left(\frac{a_0 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_4}{2} \right).$$

Пусть в случае $k = m$ имеем справедливое неравенство

$$\frac{m(m+3)}{2} a_{2m} - \frac{m(m+1)}{2} a_{2m+2} \geqslant a_0 + \ldots + a_{2m-2},$$

откуда

$$\frac{m(m+3)}{2} a_{2m} - \frac{m(m+1)}{2} a_{2m+2} + a_{2m} \geqslant a_0 + a_2 + \ldots + a_{2m-2} + a_{2m}.$$

Остается доказать неравенство

$$\frac{m(m+3)}{2}a_{2m} - \frac{m(m+1)}{2}a_{2m+2} + a_{2m} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(m+1)(m+4)}{2}a_{2m+2} - \frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{2m+4},$$

или

$$(m+1)(m+2)\,a_{2m+2} \geqslant \frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{2m} + \frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{2m+4},$$

которое справедливо.

б) Пусть $a_k = -a^k$. Так как в этом случае $-a^k \geqslant \dfrac{-a^{k-1} - a^{k+1}}{2}$, то согласно неравенству а) данного упражнения имеем

$$\frac{-a - a^3 - \ldots - a^{2n-1}}{n} \geqslant \frac{-1 - a^2 - \ldots - a^{2n}}{n+1},$$

откуда

$$\frac{1 + a + \ldots + a^{2n}}{a + a^3 + \ldots + a^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}.$$

7.15. В случае $n = 1$ имеем справедливое неравенство $1 > \ln 2$. Предположим, что оно справедливо в случае $n = k$, т. е. имеет место неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} > \ln(k+1).$$

Прибавляя к его обеим частям $\dfrac{1}{k+1}$, получим

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \ln(k+1) + \frac{1}{k+1}.$$

Теперь докажем неравенство

$$\ln(k+1) + \frac{1}{k+1} > \ln(k+2),$$

которое эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{k+1} > \ln(k+2) - \ln(k+1) = \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right),$$

или $1 > \ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}$. Отсюда $e > \left(\dfrac{1+1}{k+1}\right)^{k+1}$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

и $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает (см. упр. 3.16, а)).

7.16. В случае $n = 1$ имеем справедливое неравенство $1 \leqslant 1$. Предположим, что оно справедливо в случае $n = k$, т. е. имеет место

неравенство

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt{k}}\leqslant 3-\frac{2}{\sqrt{k}},$$

добавив к обеим частям которого $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}$, получим

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\leqslant 3-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}.$$

Остается доказать, что $3-\dfrac{2}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\leqslant 3-\dfrac{2}{\sqrt{k+1}}$.

Действительно, так как $\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{k(k+1)}+k}$, то

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}=\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k(k+1)}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}.$$

Следовательно, получили, что данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

7.17. В случае $n=1$ получается справедливое неравенство $1+\alpha\geqslant 1+\alpha$. Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $n=k$ и покажем, что оно справедливо также в случае $n=k+1$.

Когда $n=k$, имеем $(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha+\dfrac{k(k-1)}{2}\alpha^2$. В этом случае

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant(1+\alpha)\left(1+k\alpha+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^2\right)=$$

$$=1+k\alpha+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^2+\alpha+k\alpha^2+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^3=$$

$$=1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^3\geqslant 1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2.$$

Таким образом, получили, что

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2,$$

следовательно, данное неравенство справедливо при любом натуральном значении n.

7.18. В случае $k=1$ получим справедливое неравенство $1>\dfrac{2}{e}$. Предположим, что данное неравенство справедливо в случае $k=m$ $\left(\text{т.е. } m!>\left(\dfrac{m+1}{e}\right)^m\right)$, и докажем, что оно выполняется также при $k=m+1$ $\left(\text{т.е. что справедливо неравенство } (m+1)!>\left(\dfrac{m+2}{e}\right)^{m+1}\right)$.

Имеем $m! > \left(\dfrac{m+1}{e}\right)^m$. Следовательно,

$$(m+1)! > \left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1} \cdot e. \tag{7.11}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ и последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастающая (см. упр. 3.16, а)), то

$$e > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}. \tag{7.12}$$

Перемножая неравенства (7.11) и (7.12), получим

$$(m+1)! > \left(\frac{m+2}{e}\right)^{m+1}.$$

Следовательно, данное неравенство справедливо при всех натуральных значениях k.

7.19. Сначала докажем, что

$$2\,|\sin x| + |\sin 2x| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{7.13}$$

Действительно, имеем

$$2|\sin x| + |\sin 2x| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(3-3|\cos x|)\,(1+|\cos x|)^3} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{6}{4}\right)^4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В случае $n=0$ $|\sin x| \leqslant 1$.

Предположим, что доказываемое неравенство справедливо в случае $n \leqslant k$, т. е.

$$|\sin x| + |\sin 2x| + \ldots + |\sin 2^n x| \leqslant 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,n$$

при любом значении x. Докажем, что оно справедливо также при $n = k+1$.

Рассмотрим два случая.

а) $|\sin x| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, в этом случае

$$|\sin x| + (|\sin 2x| + \ldots + |\sin 2^k \cdot 2x|) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,(k+1).$$

б) Когда $|\sin x| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, из (7.13) получим
$$|\sin x| + |\sin 2x| < \sqrt{3},$$
следовательно,
$$|\sin x| + |\sin 2x| + (|\sin 4x| + \ldots + |\sin 2^{k-1} \cdot 4x|) <$$
$$< \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(k-1) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(k+1).$$
Значит, данное неравенство справедливо при всех натуральных значениях n.

7.20 Рассмотрим функцию
$$f_n(\alpha) = \cos\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \ldots + \frac{\cos n\alpha}{n}$$
в области $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, и пусть она принимает свое наименьшее значение в этой области в точке α_n.

Рассмотрим следующие случаи.

а) $\alpha_n = 0$. В этом случае $f_n(\alpha) \geqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} > -\dfrac{1}{2}$.

б) $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2}$. В этом случае $f_n(\alpha) \geqslant f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$, так как
$$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$
$$f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \qquad f_6\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_7\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$$
и т. д.

в) $0 < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$. В этом случае $f_n'(\alpha_n) = 0$, т. е.
$$-\sin\alpha_n - \sin 2\alpha_n - \ldots - \sin n\alpha_n = 0,$$
откуда получаем
$$2\sin\frac{\alpha_n}{2}\sin\alpha_n + \ldots + 2\sin\frac{\alpha_n}{2}\sin n\alpha_n = 0,$$
следовательно,
$$\cos\frac{\alpha_n}{2} = \cos\left(n\alpha_n + \frac{\alpha_n}{2}\right).$$
Из последнего равенства получаем
$$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \pm\sin\left(n\alpha_n + \frac{\alpha_n}{2}\right),$$
поэтому
$$\cos n\alpha_n = \cos\left(n\alpha_n + \frac{\alpha_n}{2}\right)\cos\frac{\alpha_n}{2} + \sin\left(n\alpha_n + \frac{\alpha_n}{2}\right)\sin\frac{\alpha_n}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\alpha_n}{2} \pm \sin^2\frac{\alpha_n}{2} > 0.$$

Таким образом,

$$f_n(\alpha) \geqslant f_{n-1}(\alpha_n) = \cos\alpha_n + \ldots + \frac{\cos(n-1)\alpha_n}{n-1} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и для $n-1$ утверждение справедливо, при $n=1$ имеем $f_1(\alpha) = \cos\alpha \geqslant 0 > -\frac{1}{2}$.

7.21. При $n=2$ имеем

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 2 + \frac{(a_1-a_2)^2}{a_1a_2} < 2 + \frac{1}{a_1a_2} < 3.$$

Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим два случая.

а) Существует $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ такое, что

$$(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \geqslant 0; \tag{7.14}$$

тогда $\frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_{i+1}} \leqslant \frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} + 2$, так как

$$(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \leqslant |a_i - a_{i-1}| \cdot |a_i - a_{i+1}| < 1 < a_ia_{i+1}.$$

Тогда из сказанного и по индуктивному предположению имеем

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{i-1}}{a_i} + \frac{a_i}{a_{i+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} + \frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} + 2 < 2(n-1) - 1 + 2 = 2n-1,$$

так как из условий (7.14) следует, что

$$|a_{i-1} - a_{i+1}| \leqslant \max(|a_i - a_{i-1}|, |a_i - a_{i+1}|) < 1.$$

б) Если $(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) < 0$, $i = 2, \ldots, n-1$, то тогда либо $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, либо $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. В первом случае

$$\frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-1} + \frac{a_n}{a_1} < 2n-1,$$

так как $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 < na_1$.

Во втором случае

$$\frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < \underbrace{2 + \ldots + 2}_{n-1} + 1 < 2n-1,$$

так как $a_i = a_{i+1} + |a_{i+1} - a_i| < a_{i+1} + 1 < 2a_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

7.22. а) В случае $n=1$ нужно доказать, что $\frac{\sqrt{x_2-1}}{x_2} \leqslant \frac{1}{2}$, или $(x_2-2)^2 \geqslant 0$.

Предположим, что неравенство верно для $n = k$, и докажем, что оно верно при $n = k + 1$, где $k \in \mathrm{N}$. Нужно доказать, что если

$$1 = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1} \leqslant x_{k+2},$$

то

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_{k+2} - x_{k+1}}}{x_{k+2}} \leqslant \frac{\sqrt{4k+1}}{2}.$$

Для $k + 1$ чисел $1 \leqslant \frac{x_3}{x_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{x_{k+2}}{x_2}$ имеем

$$\frac{\sqrt{\frac{x_3}{x_2} - 1}}{\frac{x_3}{x_2}} + \ldots + \frac{\sqrt{\frac{x_{k+2}}{x_2} - \frac{x_{k+1}}{x_2}}}{\frac{x_{k+2}}{x_2}} \leqslant \frac{\sqrt{4k-3}}{2},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_{k+2} - x_{k+1}}}{x_{k+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\left(\frac{\sqrt{\frac{x_3}{x_2} - 1}}{\frac{x_3}{x_2}} + \ldots + \frac{\sqrt{\frac{x_{k+2}}{x_2} - \frac{x_{k+1}}{x_2}}}{\frac{x_{k+2}}{x_2}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \frac{\sqrt{4k-3}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2\right)\left(1^2 + \left(\frac{\sqrt{4k-3}}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2x_2 - 1}{x_2^2} \cdot \frac{4k+1}{4}} \leqslant \frac{\sqrt{4k+1}}{2}$$

(см. неравенство (4.1)).

Получили, что данное неравенство справедливо также в случае $n = k + 1$, следовательно, оно будет справедливо при любом натуральном n.

б) В случае $n = 1$ имеем $\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} \leqslant \frac{1}{2} < 1$.

Предположим, что неравенство верно для $n = k$, и докажем, что оно верно при $n = k + 1$, где $k \in \mathrm{N}$. Пусть $1 = x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant x_{k+1} \leqslant x_{k+2}$ — натуральные числа; тогда имеем

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_{k+2} - x_{k+1}}}{x_{k+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x_2 - x_1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{x_1+1}+\ldots+\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{x_{k+1}+1}+\ldots+\frac{1}{x_{k+2}}\right)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_{k+2}}.$$

Если $x_{k+2}\leqslant(k+1)^2$, то

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x_{k+2}}\leqslant\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2},$$

следовательно, неравенство верно при $n=k+1$.

Если $x_{k+2}>(k+1)^2$, то

$$\frac{\sqrt{x_{k+2}-x_{k+1}}}{x_{k+2}}\leqslant\frac{\sqrt{x_{k+2}-1}}{x_{k+2}}=\sqrt{\frac{1}{x_{k+2}}-\left(\frac{1}{x_{k+2}}\right)^2}<$$
$$<\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^4}}=\frac{\sqrt{k^2+2k}}{(k+1)^2}.$$

Тогда получим

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{x_{k+1}-x_k}}{x_{k+1}}+\frac{\sqrt{x_{k+2}-x_{k+1}}}{x_{k+2}}<$$
$$<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{\sqrt{x_{k+2}-x_{k+1}}}{x_{k+2}}<$$
$$<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{\sqrt{k^2+2k}}{(k+2)^2}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{2k+1}{(k+2)^2}<$$
$$<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\underbrace{\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2}}_{2k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Итак данное неравенство справедливо также в случае $n=k+1$, следовательно, оно будет справедливо при любом натуральном n.

З а м е ч а н и е. Если $1=x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}$ — натуральные числа, то $\dfrac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\ldots+\dfrac{\sqrt{x_{n+1}-x_n}}{x_{n+1}}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n^2}\dfrac{1}{i}\right)-\dfrac{1}{2}$.

7.23. Докажем методом математической индукции.

При $n=1$ имеем, что $0<\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\pi$, следовательно,

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}\leqslant\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}.$$

При $n=2$ имеем, что $\alpha_1,\alpha_2>0$, $\beta_1,\beta_2\geqslant 0$ и $\alpha_1+\alpha_2\leqslant\beta_1+$ $+\beta_2\leqslant\pi$, нужно доказать, что

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}\leqslant\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}.$$

Пусть α_1 и α_2 — постоянные числа. Рассмотрим выражение

$$\frac{\cos x_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos x_2}{\sin\alpha_2},$$

где $\alpha_1+\alpha_2\leqslant x_1+x_2\leqslant\pi$, $x_1,x_2\geqslant 0$. Пусть это выражение принимает наибольшее значение при $x_1=\beta_1$, $x_2=\beta_2$.

Пусть $\alpha_1\leqslant\alpha_2$; тогда можно считать, что $\beta_1\leqslant\beta_2$. Действительно, в противном случае имеем, что $\cos\beta_1<\cos\beta_2$, следовательно,

$$(\cos\beta_1-\cos\beta_2)(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\leqslant 0,$$

или

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}\leqslant\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_2}.$$

Если $\beta_1=0$, то

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}-\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}-\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2}-\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}-\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}-\frac{2\sin\dfrac{\alpha_1}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha_1}{2}+\alpha_2\right)}{\sin\alpha_2}=-\frac{\sin^2\dfrac{\alpha_1}{2}\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos\dfrac{\alpha_1}{2}\sin\alpha_2}\leqslant 0.$$

Если $0<\beta_1\leqslant\beta_2$, то при уменьшении значения β_1 выражение $\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}$ увеличится, поэтому $\beta_1+\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$. Докажем, что $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}=\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$.

Действительно, заметим, что функция

$$f(x)=\frac{\cos(\beta_1+x)}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos(\beta_2-x)}{\sin\alpha_2}$$

на отрезке $[-\beta_1,\beta_2]$ принимает наибольшее значение в точке $x=0$, следовательно, по теореме Ферма $f'(0)=-\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}+\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}=0$.

Л е м м а. *Если* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n>0$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\beta_1+{}$ $+\ldots+\beta_n\leqslant\pi$ *и*

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}=\ldots=\frac{\sin\beta_n}{\sin\alpha_n}=\lambda,\tag{7.15}$$

то $\lambda=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda\neq 1$, тогда можно считать, что $\lambda<1$. Пусть $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$, тогда из (7.15) следует, что $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_n$ и $\beta_1<\alpha_1,\ldots,\beta_{n-1}<\alpha_{n-1}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

Заметим, что

$$\sin(\beta_1+\beta_2)=\lambda(\sin\alpha_1\cos\beta_2+\sin\alpha_2\cos\beta_1)>$$
$$>\lambda(\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_1)=\lambda\sin(\alpha_1+\alpha_2).$$

Аналогично получим, что

$$\sin((\beta_1+\beta_2)+\beta_3)=\sin(\beta_1+\beta_2)\cos\beta_3+\sin\beta_3\cos(\beta_1+\beta_2)>$$
$$>\lambda(\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\beta_3+\sin\alpha_3\cos(\beta_1+\beta_2))>$$
$$>\lambda(\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos(\alpha_1+\alpha_2))=\lambda\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

и т. д. Вообще, $\sin(\beta_1+\ldots+\beta_{n-1})>\lambda\sin(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})$.

Следовательно,

$$\sin(\varphi-\beta_n)>\frac{\sin\beta_n}{\sin\alpha_n}\sin(\varphi-\alpha_n),$$

где $\varphi=\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\ldots+\beta_n$. Поэтому

$$\sin\alpha_n\sin(\varphi-\beta_n)>\sin\beta_n\sin(\varphi-\alpha_n),$$

или

$$\sin\alpha_n\sin\varphi\cos\beta_n-\sin\alpha_n\sin\beta_n\cos\varphi>$$
$$>\sin\beta_n\sin\varphi\cos\alpha_n-\sin\beta_n\sin\alpha_n\cos\varphi,$$
$$\sin\varphi\sin(\alpha_n-\beta_n)>0.$$

Так как $0<\varphi\leqslant\pi$, то $\varphi\neq\pi$ и $\sin\varphi>0$; тогда $\alpha_n-\beta_n>0$, значит, $\alpha_n>\beta_n$.

Таким образом $\alpha_1>\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}>\beta_{n-1},\alpha_n>\beta_n$; но тогда $\alpha_1+{}+\ldots+\alpha_n>\beta_1+\ldots+\beta_n$, что неверно, следовательно, $\lambda=1$. Лемма доказана.

Так как $\sin\alpha_1=\sin\beta_1$ и $\sin\alpha_2=\sin\beta_2$, то $\alpha_1=\beta_1$ и $\alpha_2=\beta_2$, или $\alpha_1=\beta_1$ и $\pi-\alpha_2=\beta_2$ ($\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1+\pi-\alpha_2$, $\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$, значит, $\alpha_2=\beta_2$).

Следовательно,

$$\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\alpha_2}=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}.$$

Пусть теперь $n\geqslant 3$ и неравенство верно для $n-1$, покажем, что оно будет справедливо и для n. Пусть $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$ — постоянные числа. Рассмотрим выражение

$$\frac{\cos x_1}{\sin\alpha_1}+\ldots+\frac{\cos x_n}{\sin\alpha_n},$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_n\geqslant 0$ и $\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant x_1+\ldots+x_n\leqslant\pi$, и пусть это выражение принимает наибольшее значение при $x_1=\beta_2,\ldots,x_n=\beta_n$. Тогда $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_n$ (см. случай $n=2$). Можно считать $\beta_1>0$, в противном случае для $n-1$ имеем

$$\frac{\cos\beta_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\cos\beta_3}{\sin\,\alpha_3}+\ldots+\frac{\cos\beta_n}{\sin\,\alpha_n}\leqslant\frac{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}+\ldots+\frac{\cos\alpha_n}{\sin\,\alpha_n}.\quad(7.16)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{\cos\beta_2}{\sin\,\alpha_2}-\frac{\cos\alpha_1}{\sin\,\alpha_1}-\frac{\cos\alpha_2}{\sin\,\alpha_2}\leqslant\frac{\cos\beta_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}-\frac{\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\,(\alpha_1+\alpha_2)}. \quad (7.17)$$

Действительно, так как

$$\cos\beta_2\left(\frac{1}{\sin\alpha_1}-\frac{1}{\sin\,(\alpha_1+\alpha_2)}\right)\leqslant\frac{1}{\sin\,\alpha_2}-\frac{1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$(\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\leqslant\pi,\ \ \sin(\alpha_1+\alpha_2)\geqslant\sin\alpha_2),$$

то достаточно показать, что

$$\frac{1-\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}-\frac{1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}-\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}\right)\leqslant 0,\qquad \frac{-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}\leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $0<\frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_2}{2}<\frac{\pi}{4}$.

Складывая неравенства (7.16) и (7.17) получим неравенство для n.

Таким образом, имеем $0<\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_n$; при уменьшении значений β_1 выражение $\frac{\cos\beta_1}{\sin\alpha_1}+\ldots+\frac{\cos\beta_n}{\sin\,\alpha_n}$ увеличится, поэтому $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\ldots+\beta_n$. Тогда

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}=\ldots=\frac{\sin\beta_n}{\sin\alpha_n}$$

(см. случай $n=2$), следовательно, согласно лемме $\alpha_1=\beta_2,\ldots,\alpha_n=\beta_n$. Задача решена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Доказать следующие неравенства (1–18).

1. $\left(\frac{a_2}{a_1}-\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_3}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\leqslant\frac{a_n}{a_1}-\frac{a_1}{a_n}$, где $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$.

2. $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+\ldots+a_n$, где $a_1,\ldots,a_n>-2$ и $a_1,\ldots,a_n$ одного знака.

3. $C\leqslant D\leqslant 2C$, где $C=(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2$, $D=(a_1-b_n)^2+\ldots+(a_2-b_n)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2$, $b_k=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ $(k=1,\ldots,n)$.

4. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, где $n \geqslant 3$, $n \in \mathrm{N}$.

5. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k < 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$, где $k \leqslant n$, $n, k \in \mathrm{N}$.

6. $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$, где $k \in \mathrm{N}$.

7. $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} \leqslant \dfrac{1}{a_1 a_n}\left(n\,(a_1 + a_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$, где $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant a_n$.

8. $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < \dfrac{a_{k+1} + \ldots + a_n}{n-k}$, где $a_1 <$ $< a_2 < \ldots < a_n$, $n > k$, $n, k \in \mathrm{N}$.

9. $a_1^2 - a_2^2 + \ldots - a_{2n}^2 + a_{2n+1}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + \ldots - a_{2n} + a_{2n+1})^2$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n+1} \geqslant 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

10. $x_1 + x_1\,(x_2 - x_1) + x_2\,(x_3 - x_2) + \ldots + x_{n-1}\,(x_n - x_{n-1}) \leqslant$
$$\leqslant \frac{(n-1)\,x_n^2 + 2x_n + n - 1}{2n}.$$

11. $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n > (2n)!$, где $n \geqslant 5$, $n \in \mathrm{N}$.

12. $\dfrac{(2m_1)!}{m_1!} \cdot \dfrac{(2m_2)!}{m_2!} \cdot \ldots \cdot \dfrac{(2m_n)!}{m_n!} \geqslant 2^S$, где $m_1, m_2, \ldots, m_n \in Z_0$ и $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = S$.

13. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+2b} + \ldots + \dfrac{1}{a+nb} < \dfrac{n}{\sqrt{a\,(a+nb)}}$, где $a, b > 0$ и $n \in \mathrm{N}$.

14. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{n}{n-k} \cdot \dfrac{1}{2^{k-1}} < 4$, где $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$.

15. а) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k < 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{2n^2}$, где $k, n \in \mathrm{N}$ и $(k-1)^2 < n$;

б) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{4n}\right) < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{4(n+1)}\right)$, где $n \in \mathrm{N}$.

16. $\sum\limits_{i=0}^{n} |\cos 2^i x| \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$, где $n \in \mathrm{N}$.

17. а) $\sin\alpha + \dfrac{\sin 2\alpha}{2} + \ldots + \dfrac{\sin n\alpha}{n} \geqslant 0$, где $n \in \mathrm{N}$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

б) $\cos\alpha + \dfrac{\cos 2\alpha}{2} + \ldots + \dfrac{\cos n\alpha}{n} \geqslant -1$, где $n \in \mathrm{N}$.

18. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1} \geqslant \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}$, где $0<x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant x_n$, $n>2$.

19. Для любого натурального $n>1$ найти минимальное значение C, если неравенство $\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}<C$ выполняется для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющих равенству $a_1+\ldots+a_n=b_1+\ldots+b_n$.

§ 8. О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 8.1. Доказать двойное неравенство

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}, \tag{8.1}$$

где $x > 0$, $y > 0$.

Применяя несколько раз неравенство (8.1), получим

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d}\right),$$

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right) + \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}\right) + \left(\frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c}\right) \geqslant \frac{12}{a+b+c+d}.$$

Пример 8.2 похож на предыдущий.

Пример 8.2. Доказать неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)},$$

где $a, b, c > 0$.

Доказательство. Оказывается, что

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geqslant \frac{9}{x+y}, \tag{8.2}$$

где $x, y > 0$ (убедитесь сами).

Поэтому

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{4}{a+b+b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Доказательства этих двух примеров очень похожи друг на друга. Возникает мысль: возможно ли, что справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}, \tag{8.3}$$

где $b_1, b_2 > 0$?

Неравенство (8.3) легко приводится к неравенству вида

$$\frac{a_1^2b_2}{b_1}+\frac{a_2^2b_1}{b_2}\geqslant 2a_1a_2,$$

которое очевидно $\left(\text{причем равенство имеет место при } \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}\right)$.

Теперь не представляет труда доказать методом математической индукции обобщение неравенства (8.3)

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \tag{8.4}$$

где $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Замечание. В неравенстве (8.4) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Получилось очень красивое неравенство. Однако оказывается, что это одна из форм записи неравенства Коши–Буняковского. Действительно, произведя замену $x_i=\dfrac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $y_i=\sqrt{b_i}$, получим неравенство Коши–Буняковского

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)\geqslant\left(x_1y_1+\ldots+x_ny_n\right)^2.$$

Оказывается, что при решении некоторых неравенств форма записи (8.4) более удобна.

Попробуем получить более общее неравенство. Запишем a_i^2 как произведение двух множителей.

Доказывая полученное неравенство при $n = 2$, получим новые условия. Оказывается, что при выполнении условий

$$\frac{a_1}{c_1}\geqslant\frac{a_2}{c_2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{a_n}{c_n},\qquad\frac{b_1}{c_1}\geqslant\frac{b_2}{c_2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{b_n}{c_n}$$

$\left(\text{можно говорить, что } \dfrac{a_i}{c_i} \text{ и } \dfrac{b_i}{c_i} \text{ имеют одинаковую упорядоченность}\right)$ и

$$c_i>0\quad(i=1, 2, \ldots, n)$$

справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i}. \tag{8.5}$$

Когда $a_i = b_i$, неравенство (8.5) сводится неравенству (8.4).

Для доказательства неравенства (8.5) нам необходим следующий факт: если

$$\frac{a_1}{c_1} \geqslant \frac{a_2}{c_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{a_n}{c_n} \quad (c_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{a_1 + \ldots a_k}{c_1 + \ldots + c_k} \geqslant \frac{a_n}{c_n}$$

для всех значений $k = 1, 2, \ldots, n$ (см. упр. 1.11).

Докажем неравенство (8.5) методом математической индукции по n. Когда $n = 2$, имеем неравенство

$$\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} \geqslant \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{c_1 + c_2},$$

или

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) \geqslant 0,$$

которое получается из условий $\dfrac{a_1}{c_1} \geqslant \dfrac{a_2}{c_2}$ и $\dfrac{b_1}{c_1} \geqslant \dfrac{b_2}{c_2}$.

Пусть (8.5) справедливо в случае $n = k$. Имеем

$$\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} + \ldots + \frac{a_k b_k}{c_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_k)(b_1 + \ldots + b_k)}{c_1 + \ldots + c_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}}.$$

Из вышеуказанного факта и выполнения неравенства, полученного при $n = 2$, следует, что

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)}{c_1 + c_2 + \ldots + c_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_{k+1})(b_1 + \ldots + b_{k+1})}{c_1 + \ldots + c_{k+1}}.$$

Аналогично можно доказать, что если $\dfrac{a_i}{c_i}$ и $\dfrac{b_i}{c_i}$ имеют противоположные упорядоченности, то неравенстве (8.5) меняется знак неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}, \tag{8.5$'$}$$

З а м е ч а н и е. При выполнении условий $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ и $0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n$ справедливы условия неравенства (8.5) и, следовательно, это неравенство справедливо.

Из неравенств (8.4) и (8.5) получаются следующие известные неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}, \quad \text{где} \quad c_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2, \tag{8.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i, \tag{8.7}$$

где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ (*неравенство Чебышева*).

Оказывается, что неравенство (8.5) является некоторой формой записи классического неравенства.

После замены $a_i = c_i x_i$, $b_i = c_i y_i$, $P_i = \dfrac{c_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}$ оно приводится к одному из вариантов записи неравенства Чебышева; если x_i и y_i имеют одинаковые упорядоченности, $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$, $P_i > 0$, то для средних $Mz = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i P_i$ имеет место неравенство $Mx \cdot My \leqslant M(xy)$.

Получилось, что неравенство Коши–Буняковского является частным случаем неравенства Чебышева.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать неравенства 8.1–8.8.

8.1. $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2} \geqslant \dfrac{3}{2}$, где $x_1, x_2, x_3 > 0$.

8.2. $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + d} + \dfrac{c}{d + a} + \dfrac{d}{a + b} \geqslant 2$, где $a, b, c, d > 0$.

8.3. $\dfrac{x_1}{x_2 + x_4} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \dfrac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geqslant 2$, где $n \geqslant 4$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

8.4. $\dfrac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \dfrac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \dfrac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \dfrac{a + b + c}{3}$, где a, b, $c > 0$.

8.5. $\dfrac{a_1}{p - 2a_1} + \dfrac{a_2}{p - 2a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{p - 2a_n} \geqslant \dfrac{n}{n - 2}$, где p — периметр

многоугольника со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$.

8.6. $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(a+c)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \dfrac{3}{2}$, где $abc = 1$ и $a, b, c > 0$.

8.7. $8\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 \geqslant 9\left(x^2+yz\right)\left(y^2+xz\right)\left(z^2+xy\right)$, где x, y, $z > 0$.

8.8.
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \leqslant \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \ldots d_i,$$
где $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant c_n, \ldots, 0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.

8.9. Рассматривается последовательность с положительными членами (x_k), где $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$ Докажите, что существует такое n, что для любой такой последовательности (x_k)
$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3{,}999.$$

8.10. Из внутренней точки M заданного треугольника ABC проведены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 к прямым BC, CA и AB соответственно. Для какой внутренней точки M треугольника ABC выражение $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{CA}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1}$ принимает наименьшее значение?

8.11. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, а C — окружность, описанная около треугольника $A_1A_2A_3$. Прямые GA_1, GA_2 и GA_3 пересекают второй раз окружность C в точках B_1, B_2 и B_3 соответственно. Докажите, что
$$GA_1 + GA_2 + GA_3 \leqslant GB_1 + GB_2 + GB_3.$$

8.12. Докажите неравенство
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} - 2k\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} \geqslant \frac{\left(a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k}\right)^2}{2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}\right)},$$
где $k \in \mathrm{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{2k} > 0$.

8.13. Докажите, что
$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n}{2} \leqslant \frac{n-1}{2}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right),$$
где $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots a_n \geqslant 0$ и $\dfrac{1}{1+a_1} + \ldots + \dfrac{1}{1+a_n} = n - 1$.

РЕШЕНИЯ

8.1. В похожих примерах часто бывает удобно вместо $\frac{a}{b}$ написать $\frac{a^2}{ab}$. То есть

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\\ +\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_1+x_2)}\geqslant\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}\geqslant\frac{3}{2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leqslant x_1^2+$ $+x_2^2+x_3^2$).

8.2. Имеем

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\geqslant\\ \geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}\geqslant 2.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно раскрыть скобки в выражении $(a+b+c+d)^2$ и воспользоваться неравенствами $a^2+c^2\geqslant 2ac$, $b^2+d^2\geqslant 2bd$.

8.3. Имеем

$$\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_n)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n(x_1+x_{n-1})}\geqslant\\ \geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1)}=A_n.$$

Когда $n\geqslant 4$, имеем $A_n\geqslant 2$ (см. решение упр. 7.6).

8.4. Воспользовавшись неравенством (8.4), получим

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2}+\frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2}\geqslant\\ \geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

(здесь было использовано неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}$, т. е. неравенство (8.6) при $n=3$).

8.5. Без нарушения общности можно предположить, что $a_1\geqslant$ $\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$; тогда $0<p-2a_1\leqslant p-2a_2\leqslant\ldots\leqslant p-2a_n$.

Учитывая замечания к неравенству (8.5), получим

$$\frac{a_1 \cdot 1}{p-2a_1}+\frac{a_2 \cdot 1}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n \cdot 1}{p-2a_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,n}{np-2\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{n}{n-2}.$$

8.6. Имеем

$$\frac{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}{a\,(b+c)}+\frac{\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}{b\,(a+c)}+\frac{\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}{c\,(a+b)} \geqslant \frac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}{2\,(ab+bc+ac)}=$$

$$=\frac{ab+bc+ac}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}.$$

8.7. Имеем

$$(x^2+yz)\,(y^2+xz)\,(z^2+xy) \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{3}\right)^3 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{3}\,(x^2+y^2+z^2)\right)^3. \qquad (8.8)$$

С другой стороны, согласно неравенству (8.4)

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^4}{x\,(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^4}{y\,(x^2+y^2+z^2)}+$$

$$+\frac{z^4}{z\,(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

откуда

$$3\,(x^3+y^3+z^3)^2 \geqslant (x^2+y^2+z^2)^3. \qquad (8.9)$$

Из (8.8) и (8.9) получаем

$$(x^2+yz)\,(y^2+xz)\,(z^2+xy) \leqslant \frac{8}{9}\,(x^3+y^3+z^3)^2.$$

8.8. Воспользовавшись неравенством Чебышева, получим

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\ldots d_i.$$

8.9. Воспользовавшись неравенством (8.4), получим

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant \frac{(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=K_n.$$

Докажем, что существует натуральное число n_0 такое, что при $n > n_0$ $K_n \geqslant 3{,}999$.

Действительно,

$$(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2-3{,}999\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)=$$
$$=(1-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}))^2+0{,}001\,(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})-$$
$$-3{,}999x_n \geqslant 0{,}001\,(n-1)\,x_n-3{,}999x_n \geqslant 0,$$

когда $n \geqslant \dfrac{3{,}999}{0{,}001}+1$. Таким образом, n_0 можно принять равным 4000.

8.10. Преобразовав выражение и используя неравенство (8.4), получим

$$\frac{BC^2}{BC\cdot MA_1}+\frac{CA^2}{CA\cdot MB_1}+\frac{AB^2}{AB\cdot MC_1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(BC+CA+AB)^2}{BC\cdot MA_1+CA\cdot MB_1+AB\cdot MC_1}=\frac{4p^2}{2S}=2\,\frac{p}{r}.$$

Следовательно, наименьшее значение выражения $\dfrac{BC}{MA_1}+\dfrac{CA}{MB_1}+\dfrac{AB}{MC_1}$ будет равно $\dfrac{2p}{r}$, когда $\dfrac{BC}{BC\cdot MA_1}=\dfrac{CA}{CA\cdot MB_1}=\dfrac{AB}{AB\cdot MC_1}$, т. е. когда $MA_1=MB_1=MC_1$; значит, M является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

8.11. Обозначим через A_1', A_2', A_3' и a_1, a_2, a_3 середины и длины сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 соответственно.

Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$; нетрудно доказать, что $GA_3 \leqslant GA_2 \leqslant GA_1$. Имеем $\dfrac{3}{2}\,GA_1\cdot B_1A_1'=\dfrac{1}{4}a_1^2$, откуда $GB_1=\dfrac{GA_1}{2}+\dfrac{a_1^2}{6GA_1}$.

Таким образом, остается доказать, что

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3} \geqslant GA_1+GA_2+GA_3.$$

Воспользовавшись неравенством (8.5), получим

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3} \geqslant \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{GA_1+GA_2+GA_3}=\frac{3\,(GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2)}{GA_1+GA_2+GA_3} \geqslant$$
$$\geqslant GA_1+GA_2+GA_3.$$

8.12. Согласно неравенству упр. 2.1 имеем

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}+\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}} \geqslant$$

$$\geqslant 2k\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}},$$

следовательно,

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}\geqslant(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+\ldots$$

$$\ldots+(\sqrt{a_{2k-1}}-\sqrt{a_{2k}})^2=\frac{(a_1-a_2)^2}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}+\ldots+\frac{(a_{2k-1}-a_{2k})^2}{(\sqrt{a_{2k-1}}+\sqrt{a_{2k}})^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(a_1-a_2)^2}{2\,(a_1+a_2)}+\ldots+\frac{(a_{2k-1}-a_{2k})^2}{2\,(a_{2k-1}+a_{2k})}.$$

Теперь, используя неравенство (8.4), получим

$$\frac{(a_1-a_2)^2}{2\,(a_1+a_2)}+\ldots+\frac{(a_{2k-1}-a_{2k})^2}{2\,(a_{2k-1}+a_{2k})}\geqslant\frac{(a_1-a_2+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k})^2}{2\,(a_1+a_2+\ldots+a_{2k})}.$$

Таким образом,

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}\geqslant\frac{(a_1-a_2+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k})^2}{2\,(a_1+a_2+\ldots+a_{2k})}.$$

8.13. Имеем

$$n-1=\frac{1}{1+a_1}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\geqslant\frac{n^2}{(1+a_1)+\ldots+(1+a_n)},$$

следовательно, $\frac{n-1}{2}(a_1+\ldots+a_n)\geqslant\frac{n}{2}$. Заметим, что

$$1=\frac{a_1}{1+a_1}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_n}\geqslant\frac{(\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n})^2}{n+a_1+\ldots+a_n},$$

следовательно, $\frac{n}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Доказать неравенства 1–19.

1. $2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+a_{i+1}}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, где $a_{n+1}=a_1$, $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}$, где $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_i>0$ $(i=1,\,2,\ldots,\,n)$.

3. $a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}$, где a, b, $c>0$.

4. а) $\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant$

$$\leqslant \frac{(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)}{(a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n)},$$

где $a_i, b_i > 0$ $(i=1,\, 2, \ldots,\, n)$;

б) $$\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1+aa_1b_1}+\ldots+\frac{a_n+b_n}{a_n+b_n+aa_nb_n} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n^2}{a(a_1+\ldots+a_n)+2n}+\frac{n^2}{a(b_1+\ldots+b_n)+2n},$$

где $a_i, b_i > 0$ $(i=1,\, 2, \ldots,\, n)$, $a>0$;

в) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^2}}$, где $a_i>0$, $b_i>0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

г) $$\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1+na_1b_1}+\ldots+\frac{a_n+b_n}{a_n+b_n+na_nb_n}+$$
$$+\frac{n}{2}\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{a_1+\ldots+a_n+2}+\frac{b_1+\ldots+b_n}{b_1+\ldots+b_n+2}\right) \geqslant n,$$

где $a_i, b_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$;

д) $\dfrac{c_1}{a_1\cdot b_1}+\ldots+\dfrac{c_n}{a_n\cdot b_n} \geqslant \dfrac{n^2(c_1+\ldots+c_n)}{(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)}$, где a_i, b_i, $c_i>0$, $\left(\dfrac{a_i}{c_i}-\dfrac{a_j}{c_j}\right)\left(\dfrac{b_i}{c_i}-\dfrac{b_j}{c_j}\right) \leqslant 0$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

5. $\dfrac{x_1}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\dfrac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\dfrac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \dfrac{n}{2}$, где $n=5$ или $n=6$, $x_i>0$ $(i=1,\, 2, \ldots,\, n)$.

6. $$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

7. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a+c-b}$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

8. $\dfrac{a}{b+2c+3d}+\dfrac{b}{c+2d+3a}+\dfrac{c}{d+2a+3b}+\dfrac{d}{a+2b+3c} \geqslant \dfrac{2}{3}$, где $a, b, c, d > 0$.

9. $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$, где $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $n > 1$.

10. $$\frac{x_1^2}{1+x_2+x_3+\ldots+x_n} + \frac{x_2^2}{1+x_1+x_3+\ldots+x_n} + \ldots \\ \ldots + \frac{x_n^2}{1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{4}{3n-2},$$
где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2$, $n \geqslant 2$.

11. $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \geqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $k \in \mathrm{N}$ и $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$; $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

12. $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

13. а) $\dfrac{(x+y)\,z}{(x+y)^2 + z^2} \leqslant \dfrac{4z}{4z+3x+3y}$, где $x, y, z > 0$;

б) $\dfrac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \dfrac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqslant \dfrac{3}{5}$, где $a, b, c > 0$;

14. $$\frac{x_1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_1}} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}\,(\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}),$$
где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \geqslant 3$.

15. $\dfrac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{2\,(a_1^2 + \ldots + a_n^2)} \leqslant \dfrac{a_1}{a_2+a_3} + \dfrac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1+a_2}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geqslant 3$.

16. $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6} + \dfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6} + \dfrac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geqslant 2$, где $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$.

17. $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

18. $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \dfrac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \dfrac{z^3}{(1+y)(1+x)} \geqslant \dfrac{3}{4}$, где $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$.

19. $\dfrac{a^3}{b+2c} + \dfrac{b^3}{c+2a} + \dfrac{c^3}{a+2b} \geqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$, где $a, b, c > 0$.

20. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}},$$

где $n \geqslant 3$ и $x_1, \ldots, x_n > 0$, $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$.

21. Доказать, что

$$\frac{2n}{3n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \leqslant \frac{3n+1}{4(n+1)},$$

где $n \in \mathrm{N}$.

§ 9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется доказать неравенство

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{9.1}$$

в интервале $[a, b] = I$ или $[a, +\infty) = I$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в области I.

Теорема 9.1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в области I, $f(a) \geqslant g(a)$ и в области I $h'(x) \geqslant 0$, где $h(x) = f(x) - g(x)$, то в I имеет место неравенство* (9.1).

Доказательство. Если в области I $h'(x) \geqslant 0$, то функция $h(x)$ в этой области не убывает и, следовательно, $h(x) \geqslant h(a)$ в каждой точке x области I, т.е. $f(x) - g(x) \geqslant f(a) - g(a) \geqslant 0$, откуда $f(x) \geqslant g(x)$.

Замечание. Если в области I $h'(x) > 0$ $(x \neq a)$, то для $x \in I$ и $x > a$ $f(x) > g(x)$.

Пример 9.1. Доказать неравенство $2^{x+1} > x + 2$, когда $x \geqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = 2^{x+1} - x - 2$ в области $[1, +\infty)$.

Имеем $h(1) = 1$ и $h'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 1$. Функция $y = 2^x$ возрастает в области $[1, +\infty)$, тогда $h'(x) \geqslant 4 \ln 2 - 1 > 0$.

Следовательно, когда $x \geqslant 1$, имеем $h(x) \geqslant h(1)$, или $2^{x+1} \geqslant x+3$, поэтому $2^{x+1} > x + 2$.

Пример 9.2. Доказать неравенство

$$\sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{k} \frac{a_m a_n}{m+n} \Big) \geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{k} \frac{x^m a_m . x^n a_n}{m+n} \Big)$$

в области $[0, +\infty)$. Имеем

$$xh'(x) = \sum_{n=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{k} x^m a_m \cdot x^n a^n \Big) = (xa_1 + \dots + x^k a_k)^2 \geqslant 0,$$

следовательно, для $x > 0$ $h'(x) \geqslant 0$, поэтому $h(1) \geqslant h(0) = 0$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{k} \Bigg(\sum_{m=1}^{k} \frac{a_m a_n}{m+n} \Bigg) \geqslant 0.$$

Теорема 9.2. *Если* $f(b) \geqslant g(b)$ *и в области* I $h'(x) \leqslant 0$ $(h(x) = f(x) - g(x))$, *то в* I *имеет место неравенство* (9.1), *где* $I = [a, b]$ *или* $I = (-\infty, b]$.

Доказательство. Если в области I $h'(x) \leqslant 0$, то функция $h(x)$ в этой области не возрастает и принимает свое наименьшее значение в точке $x = b$. Но $h(b) \geqslant 0$, следовательно, для любого x из I $h(x) \geqslant 0$.

То есть в области I $f(x) - g(x) \geqslant 0$, или, что то же самое, $f(x) \geqslant g(x)$.

Теорема 9.3. *Если для любого* x *из области* I *имеет место неравенство* (9.1), *то имеет место также неравенство*

$$\int\limits_a^x f(t)dt \geqslant \int\limits_a^x g(t)\,dt, \tag{9.2}$$

где $I = [a,b]$ *или* $I = [a, +\infty)$.

Доказательство. Если имеет место неравенство (9.1), то имеет место и неравенство $F'(x) \geqslant G'(x)$, где $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ и $F(a) = G(a) = 0$.

Отсюда следует, что также имеет место неравенство $F(x) \geqslant G(x)$, откуда, принимая $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$, получим неравенство (9.2).

Пример 9.3. Доказать неравенство

$$\ln(2\sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2,$$

когда $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим неравенство $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$, справедливость которого следует из известного неравенства $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ с заменой α на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Интегрируя рассматриваемое неравенство, получим

$$\int\limits_{\pi/6}^{x} \operatorname{ctg} t\,dt > \int\limits_{\pi/6}^{x} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt,$$

откуда $\ln(\sin x) - \ln\frac{1}{2} > \left(\frac{\pi}{2}\,x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$, или

$$\ln(2\sin x) > \frac{1}{2}\,x(\pi - x) - \frac{5}{72}\,\pi^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать неравенства 9.1–9.22.

9.1. $3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$, где $a, b \geqslant 0$.

9.2. $2^{n-1}(x^n + y^n) \geqslant (x+y)^n$, где $x, y > 0$, $n \in \mathrm{N}$:

а) $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$; б) $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{3!}$;

в) $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$; г) $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$;

где $x \geqslant 0$ (используйте справедливое неравенство $\sin x \leqslant x$).

9.4. $x - \sin x \leqslant 1 - \cos x \leqslant x\sqrt{2} - \sin x$, где $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

9.5. $\operatorname{tg} x + \sin x \geqslant 2x$, где $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$.

9.6. $$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leqslant \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$
где $x \geqslant 0$, $n \in \mathrm{N}$.

9.7. $\ln(\cos x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$, где $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$.

9.8. $\sin x \leqslant \dfrac{x(\pi - x)}{2}$, где $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

9.9. $\operatorname{tg} x - \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} \leqslant x$, где $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$.

9.10. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \operatorname{arcctg} x > 1$, где $x > 0$.

9.11. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n} < \ln 3$, где $n \in \mathrm{N}$.

9.12. $\dfrac{3\cos x}{1 + 2\cos x} < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{3}{4 - \cos x}$, где $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

9.13. $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$,, где $a, b, p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

9.14. $\dfrac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, где $a > b > 0$, $p > n$.

9.15. $(1 + x^t)^{1/t} - (1 + x^t)^{-1/t} \leqslant x$, где $x \geqslant 0$, $t \geqslant 2$.

9.16. $ab \leqslant e^a + b(\ln b - 1)$, где $b \geqslant 1$.

9.17. $\left(2 + \dfrac{(\ln x)^2}{3}\right) \ln x \leqslant \dfrac{x^2 - 1}{x}$, где $x \geqslant 1$.

9.18. $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 3$, где $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

9.19. $\dfrac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \ldots + n^k < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{k+1} \cdot \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$, где $n, k \in \mathrm{N}$.

9.20. а) $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n!$, где $n \in \mathrm{N}$;

б) $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, где $n \geqslant 7$, $n \in \mathrm{N}$.

9.21. $(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} > (a^\beta + b^\beta)^{1/\beta}$, где $a, b > 0$, $0 < \alpha < \beta$.

9.22. $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leqslant \left(\dfrac{a}{c}\right)^a \cdot \left(\dfrac{b}{d}\right)^b$, где $a, b, c, d > 0$.

9.23. Вычислите целую часть числа $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$.

9.24. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2,$$

где $n \in \mathrm{N}$, $n \geqslant 2$.

9.25. Докажите неравенство Бернулли:

а) $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, если $\alpha > 1$, $x > -1$, $x \neq 0$;

б) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, если $0 < \alpha < 1$, $x > -1$, $x \neq 0$.

9.26. Пусть $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, где $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ — действительные числа, а n — натуральное число. Известно, что $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ для всех действительных чисел x. Докажите, что $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant 1$.

Докажите неравенства 9.27–9.32.

9.27. $x^2 \geqslant (1+x)\ln^2(1+x)$, где $x > -1$.

9.28. $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, где $n \geqslant 3$, $n \in \mathrm{N}$.

9.29. $a_1 b_1^x + a_2 b_2^x + \ldots + a_n b_n^x \geqslant a_1 + \ldots + a_n$, где $a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b_1^{a_1} \ldots b_n^{a_n} = 1$, $x > 0$.

9.30. $x^x > a\left(\dfrac{x+1}{a+1}\right)^{x+1}$, где $\dfrac{1}{a} < x$, $a > 0$.

9.31. $\left(\dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \left(\dfrac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$, где a_1, $a_2, \ldots, a_n > 0$, $\alpha \geqslant \beta$, α, $\beta \neq 0$.

9.32. а) $\sqrt{ab} < \dfrac{a-b}{\ln a - \ln b} < \dfrac{a+b}{2}$, где $a, b > 0$, $a \neq b$;

б) $\dfrac{2x}{x+2} < \ln(x+1) < \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$, где $x > 0$;

в) $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, где $x > 0$, $x \neq 1$;

г) $\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$, где $x > 0$;

д) $|x-y| \leqslant |\ln x - \ln y|$, где $0 < x, y \leqslant 1$;

е) $\ln \dfrac{1}{y} < \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}$, где $0 < y < x \leqslant 1$;

ж) $\ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}$, где $x, y > 0$ и $x + y \leqslant 1$.

9.33. а) Докажите неравенство $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$, где $k \in \mathrm{N}$.

б) Докажите, что если многочлен n-й степени $P(x)$ неотрицателен при любом значении x, то $P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$ при всех значениях x.

9.34. Докажите неравенство $a^r - b^r + c^r \geqslant (a-b+c)^r$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ и $r \geqslant 1$.

РЕШЕНИЯ

9.1. Рассмотрим функцию $h(a) = 3a^3 + 7b^3 - 9ab^2$ в области $[0, +\infty)$. В случае $b > 0$

$$h(0) = 7b^3 > 0, \qquad h'(a) = 9a^2 - 9b^2 = 9(a-b)(a+b).$$

Функция $h(a)$ в области $[0, b]$ убывает, а в $[b, +\infty)$ возрастает, и так как $h(b) = 3b^3 + 7b^3 - 9b^3 = b^3 > 0$, то $h(a) > 0$ в области $[0, +\infty)$, следовательно, $3a^3 + 7b^3 > 9ab^2$. В случае $b = 0$ очевидно, что $3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$.

9.2. Рассмотрим функцию $h(y) = 2^{n-1}(x^n + y^n) - (x+y)^n$ в области $[0, +\infty)$. Имеем

$$h'(y) = n2^{n-1}y^{n-1} - n(x+y)^{n-1} = n((2y)^{n-1} - (x+y)^{n-1});$$

$h'(y) = 0$, если $y = x$, $h'(y) < 0$ при $0 \leqslant y < x$ и $h'(y) > 0$ при $y > x$. Это означает что на $[0, x]$ $h(y)$ убывает, а на $[x, +\infty)$ возрастает, и так как $h(x) = 0$, то в области $[0, +\infty)$ $h(y) \geqslant 0$, т. е. $2^{n-1}(x^n + y^n) \geqslant (x + y)^n$.

9.3. а) Воспользуемся неравенством $\sin x \leqslant x$, интегрируя которое, получим $\int\limits_0^x \sin t\, dt \leqslant \int\limits_0^x t\, dt$ или $-\cos t\Big|_0^x \leqslant \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^x$, т. е. $-\cos x + 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ или

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}. \qquad (9.3)$$

б) Согласно теореме 9.3 для неравенства (9.3) имеем

$$\int\limits_0^x \cos t\, dt \geqslant \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

откуда следует справедливость данного неравенства.

в) Из неравенства б) согласно теореме 9.3 можем написать

$$\int\limits_0^x \sin t\, dt \geqslant \int\limits_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt,$$

откуда и получается данное неравенство.

г) Доказательство получается из п. в) и теоремы 9.3.

9.4. Оценим разность $\sin x - \cos x$. Учитывая, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, нетрудно заметить, что в случае $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $1 \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$, интегрируя которое, получим

$$\int\limits_0^x 1\, dt \leqslant \int\limits_0^x (\cos t + \sin t)\, dt \leqslant \int\limits_0^x \sqrt{2}\, dt,$$

откуда и получаем $x \leqslant \sin x - \cos x + 1 \leqslant x\sqrt{2}$.

9.5. Согласно неравенству (3.2) имеем

$$\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 2\sqrt{\cos x \frac{1}{\cos^2 x}} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \geqslant 2,$$

а согласно теореме 9.3 имеет место также неравенство

$$\int\limits_0^x \left(\cos t + \frac{1}{\cos^2 t}\right) dt \geqslant \int\limits_0^x 2\, dt,$$

откуда получается данное неравенство.

9.6. Сначала покажем, что

$$1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n} - x^{2n+1} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n}, \quad (9.4)$$

где $x \geqslant 0$.

Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1 - x^{2n+2}}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1 + x^{2n+1}}{1+x}, \qquad x \geqslant 0,$$

или $1 - x^{2n+2} \leqslant 1 \leqslant 1 + x^{2n+1}$.

Из теоремы 9.3 и двойного неравенства (9.3) получим данное.

9.7. Поскольку $(\ln(\cos x))' = -\operatorname{tg} x$, $\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)' = -x$, то из неравенства $-\operatorname{tg} x \leqslant -x$ $\left(0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ и теоремы 9.3 получим данное неравенство.

9.8. Рассмотрим функцию $F(x) = \sin x - \dfrac{x(\pi - x)}{2}$ в области $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и функцию $G(x) = F'(x) = \cos x + x - \dfrac{\pi}{2}$ в области $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $G'(x) \geqslant 0$, то в случае $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ имеем $G(x) \leqslant G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, или $F'(x) = \cos x + x - \dfrac{\pi}{2} \leqslant 0$, и так как $x \geqslant 0$, то $F(x) \geqslant F(0) = 0$. Таким образом, $\sin x - \dfrac{x(\pi - x)}{2} \geqslant 0$.

9.9. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$ в области $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Имеем $f'(x) = 1 - (\operatorname{tg} x)' + \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^4 x \geqslant 0$, следовательно, $f(x) \geqslant f(0) = 0$, т. е. $x \geqslant \operatorname{tg} x - \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$.

9.10. Докажем, что в случае $x > 0$ имеем $\operatorname{arcctg} x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$ в области $(0, +\infty)$; $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{2}{(1+x^2)^2} < 0$, значит, функция $f(x)$ в области $(0, +\infty)$ убывает, следовательно, $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

9.11. Имеем

$$\int\limits_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{n+k}\, dx < \int\limits_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{x}\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

откуда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}<\int\limits_{n}^{n+1}\frac{1}{x}\,dx+\int\limits_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int\limits_{3n-1}^{3n}\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{n}^{3n}\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_{n}^{3n}=\ln 3.$$

9.12. Сначала докажем, что в случае $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{3\cos x}{1+2\cos x},$$

или при $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}x+2\sin x>3x.$$

Действительно, рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{tg}x+2\sin x-3x$. Тогда $f(0)=0$, и производная функции в области $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ положительна. Так как $\cos x\neq\frac{1}{\cos^2 x}$, то согласно неравенству из упр. 2.1

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x+\cos x-3>$$

$$>3\sqrt[3]{\frac{\cos x\cdot\cos x}{\cos^2 x}}-3=0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ в области $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ возрастает, откуда $f(x)>f(0)$.

Неравенство $\frac{\sin x}{x}<\frac{3}{4-\cos x}$ в области $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ эквивалентно неравенству $4\sin x-\sin x\cos x<3x$, для доказательства которого рассмотрим функцию $F(x)=4\sin x-\sin x\cos x-3x$ в заданной области. Так как

$$F'(x)=4\cos x-\cos 2x-3=4\cos x-2\cos^2 x-2=-2(\cos x-1)^2<0$$

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

то в области $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ функция $F(x)$ убывает, следовательно, $F(x)<$ $<F(0)=0$.

9.13. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{x^{p-1}}{pb}+\frac{b^{q-1}}{qx}$ в области $(0,+\infty)$: $f'(x)=\frac{p-1}{p}\frac{x^{p-2}}{b}-\frac{b^{q-1}}{qx^2}=\frac{x^p-b^q}{qbx^2}$, следовательно, $f'(x)>0$ при $x>b^{q/p}$ и $f'(x)<0$ при $0<x<b^{q/p}$.

Таким образом, в области $(0, b^{q/p}]$ функция убывает, а в области $[b^{q/p}, +\infty)$ возрастает. Следовательно, функция $f(x)$ принимает свое наименьшее значение при $x = b^{q/p}$, т. е.

$$\frac{x^{p-1}}{pb} + \frac{b^{q-1}}{qx} \geqslant \frac{(b^{q/p})^{p-1}}{pb} + \frac{b^{q-1}}{qb^{q/p}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

или $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geqslant xb$, откуда в случае $x = a$ получим данное неравенство.

9.14. Обозначим $\dfrac{a}{b}$ через c. В этом случае $c > 1$ и $\dfrac{a^p - b^p}{a^p + b^p} = \dfrac{c^p - 1}{c^p + 1}$, $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \dfrac{c^n - 1}{c^n + 1}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{c^x - 1}{c^x + 1}$ в области $(-\infty, +\infty)$: $f'(x) = \dfrac{2c^x \ln c}{(c^x + 1)^2} > 0$, следовательно, функция $f(x)$ в рассматриваемой области возрастает, значит, в случае $p > n$ $f(p) > f(n)$, т. е. $\dfrac{c^p - 1}{c^p + 1} > \dfrac{c^n - 1}{c^n + 1}$.

9.15. Нетрудно доказать, что данное неравенство эквивалентно неравенству $(1 + x^t)^{1/t} \leqslant \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$, доказательство которого следует из упр. 9.21 и неравенства $(1 + x^2)^{1/2} \leqslant \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

9.16. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x + b(\ln b - 1) - xb$ в области $(-\infty, +\infty)$: $f'(x) = e^x - b$, следовательно, функция $f(x)$ в области $[\ln b, +\infty)$ возрастает, а в области $(-\infty, \ln b]$ убывает. Поэтому в случае $x = \ln b$ функция примет свое наименьшее значение, т. е. $f(x) \geqslant f(\ln b)$, откуда $f(a) \geqslant e^{\ln b} + b(\ln b - 1) - b \ln b = 0$.

9.17. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x} - 2\ln x - \dfrac{\ln^3 x}{3}$ в области $[1, +\infty)$. Имеем

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Для выяснения знака функции $f'(x)$ рассмотрим знак функции $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x} - \ln^2 x$ в заданной области:

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{\dfrac{x^2 - 1}{x} - 2\ln x}{2x}.$$

Теперь рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x} - 2\ln x$ в области $[1, +\infty)$.

Поскольку $F'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geqslant 0$, то в случае $x \geqslant 1$ $F(x) \geqslant F(1) = 0$, следовательно, $g'(x) \geqslant 0$, откуда $g(x) \geqslant g(1) = 0$, и, наконец, $f'(x) \geqslant 0$, т. е. $f(x) \geqslant f(1) = 0$.

9.18. Рассмотрим функцию $f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x} - 3$ в области $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Имеем $f'(x) = 2^{\cos x}\cos x \ln 2(2^{\sin x - \cos x} - \operatorname{tg} x) \geqslant 0$, так как $2^{\sin x-\cos x} - \operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Действительно, рассматривая функцию $F(x) = \sin x - \cos x - \log_2 \operatorname{tg} x$ в области $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, получим

$$F'(x) = \cos x + \sin x - \frac{1}{\sin x \cos x \ln 2} = \\ = \frac{1}{\sin x \cos x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x - \frac{1}{\ln 2}\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\sin x \cos x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\ln 2}\right) < 0,$$

следовательно, $F(x) \geqslant F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, или $2^{\sin x - \cos x} - \operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Таким образом, $f'(x) \geqslant 0$, значит, $f(x) \geqslant f(0) = 0$.

В случае $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geqslant 0$; воспользовавшись тождеством $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, получим $f(x) \geqslant 0$.

9.19. Имеем

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k < \int_1^2 x^k dx + \int_2^3 x^k dx + \ldots + \int_n^{n+1} x^k dx = \int_1^{n+1} x^k dx = \\ = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1} < \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}\frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Аналогично имеем

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k > \int_0^1 x^k dx + \int_1^2 x^k dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} x^k dx = \int_0^n x^k dx = \\ = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^n = \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

9.20. а) Имеем

$$\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n >$$
$$> \int\limits_1^2 \ln x\,dx + \int\limits_2^3 \ln x\,dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^{n} \ln x\,dx = \int\limits_1^n \ln x\,dx =$$
$$= (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1 > n\ln n - n,$$

следовательно, $n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

б) Нетрудно проверить, что $7! < 7\left(\dfrac{7}{e}\right)^7$. Пусть $n \geqslant 8$. Имеем

$$\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n < \ln 7! + \int\limits_8^9 \ln x\;dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} \ln x\;dx = \ln 7! +$$
$$+ \int\limits_8^{n+1} \ln x\;dx = \ln 7! + (x\ln x - x)\Big|_8^{n+1} < (n+1)\,(\ln(n+1) - 1) -$$
$$- 8\,(\ln 8 - 1) + 8\ln 7 - 7 < (n+1)\ln n - n,$$

или $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ (см. упр. 3.16, б)).

9.21. Рассмотрим функцию $f(x) = (a^x + b^x)^{1/x}$ в области $(0, +\infty)$. Имеем

$$f'(x) = (a^x + b^x)^{1/x}\,\frac{a^x\ln a^x + b^x\ln b^x - \ln(a^x + b^x)^{a^x + b^x}}{x^2(a^x + b^x)}.$$

Рассмотрим функцию $F(t) = t\ln t + c\ln c - (t + c)\ln(t + c)$ в области $(0, c]$, где $c > 0$:

$$F'(t) = 1 + \ln t - 1 - \ln(t + c) = \ln\left(\frac{t}{t + c}\right) < \ln 1 = 0,$$

следовательно, $F(t) \leqslant F(c) = 2c\ln c - 2c\ln 2c < 0$.

Пусть $a^x \geqslant b^x$. Приняв $c = a^x$, $t = b^x$, получим $a^x\ln a^x + b^x\ln b^x - (a^x + b^x)\ln(a^x + b^x) < 0$, следовательно, $f'(x) < 0$, т. е. функция $f(x)$ в области $(0, +\infty)$ убывает, следовательно, в случае $\beta > \alpha > 0$

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} > (a^\beta + b^\beta)^{1/\beta}.$$

9.22. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^a}{(x + d)^{a+b}}$ в области $(0, +\infty)$. Имеем $f'(x) = \dfrac{x^{a-1}}{(x + d)^{a+b+1}}(ad - bx)$, следовательно, если $0 < x <$

$< \dfrac{ad}{b}$, то $f'(x) > 0$, а когда $x > \dfrac{ad}{b}$, то $f'(x) < 0$. Таким образом, функция $f(x)$ в области $\left(0, \dfrac{ad}{b}\right]$ возрастает, а в области $\left[\dfrac{ad}{b}, +\infty\right)$ убывает. Следовательно, в точке $x = \dfrac{ad}{b}$ функция принимает свое наибольшее значение. Таким образом, $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{ad}{b}\right)$, следовательно, $f(c) \leqslant f\left(\dfrac{ad}{b}\right)$, или $\dfrac{c^a}{(c+d)^{a+b}} \leqslant \dfrac{\left(\frac{ad}{b}\right)^a}{\left(d + \frac{ad}{b}\right)^{a+b}}$, откуда получаем $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leqslant \left(\dfrac{a}{c}\right)^a \left(\dfrac{b}{d}\right)^b$.

9.23. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} < \int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int\limits_4^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \ldots + \int\limits_{10^6-1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \int\limits_3^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{10^{12}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = 14997 + 3\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}\right) < 14997.$$

Аналогично имеем также

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} > \int\limits_4^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int\limits_5^6 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \ldots + \int\limits_{10^6}^{10^6+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \int\limits_4^{10^6+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(10^6+1)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} > \frac{3}{2}\sqrt[3]{10^{12}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} =$$

$$= \frac{3}{2}10^4 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = 1500 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = 14996 + \frac{8 - 3\sqrt[3]{16}}{2} > 14996.$$

Таким образом, $14996 < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{10^6}} < 14997$, следовательно, целая часть данного числа равна 14996.

9.24. Имеем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{4}} + \int\limits_4^5 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{10} + \int\limits_4^n \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} < 1{,}6 + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} < 2,$$

так как $\dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{12} < \dfrac{2\cdot 1{,}5 + 1{,}8}{12} = 0{,}4.$

Следовательно, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$

9.25. а) Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x$$

в области $(-1, +\infty)$. Поскольку $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$ и $\alpha > 1$, то в случае $-1 < x < 0$ $f'(x) < 0$, следовательно, $f(x) > f(0) = 0$, и в случае $x > 0$ $f'(x) > 0$, следовательно, $f(x) > f(0) = 0$.

б) См. решение п. а).

9.26. Имеем $-|\sin x| \leqslant f(x) \leqslant |\sin x|$.

Когда $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, имеем $-\sin x \leqslant f(x) \leqslant \sin x$, откуда

$$-\frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x},$$

следовательно,

$$-1 = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x > 0).$$

С другой стороны,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = a_1 + 2a_2 + \ldots + n\cdot a_n.$$

Таким образом, получили, что $-1 \leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + n\cdot a_n \leqslant 1$.

9.27. Когда $x \geqslant 0$, данное неравенство эквивалентно неравенству $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \geqslant \ln(1+x)$, для доказательства которого рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x)$ в области $(-1, +\infty)$.

Поскольку $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{2\sqrt{x+1}(x+1)} \geqslant 0$, то в случае $x \geqslant 0$ $f(x) \geqslant$ $\geqslant f(0) = 0$.

Когда $-1 < x \leqslant 0$, данное неравенство эквивалентно неравенству $f(x) \leqslant f(0) = 0$.

9.28. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ в области $(0,+\infty)$.

Поскольку $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, то в области $(e,+\infty)$ функция $f(x)$ убывает, следовательно, в случае $n+1>n\geqslant 3$ $f(n+1)<f(n)$, или $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<\dfrac{\ln n}{n}$, откуда $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$.

9.29. Сначала докажем, что при $x\geqslant 0$ $f(x)=b^x-1-x\ln b\geqslant 0$, так как $f'(x)=\ln b(b^x-1)$. Когда $b\geqslant 1$, то $\ln b\geqslant 0$ и $b^x-1\geqslant 0$, следовательно, $f'(x)\geqslant 0$. Когда $0<b<1$, то $\ln b<0$ и $b^x-1\leqslant 0$, следовательно, $f'(x)\geqslant 0$. Таким образом, получили, что $f'(x)\geqslant 0$, т. е. $f(x)\geqslant f(0)$, таким образом, $b^x\geqslant 1+x\ln b$, откуда можем получить

$$\begin{aligned}&a_1b_1^x+a_2b_2^x+\ldots+a_nb_n^x\geqslant\\&\qquad\geqslant a_1(1+x\ln b_1)+a_2(1+x\ln b_2)+\ldots+a_n(1+x\ln b_n)=\\&\qquad=a_1+a_2+\ldots+a_n+x\ln(b_1^{a_1}b_2^{a_2}\ldots b_n^{a_n})=a_1+a_2+\ldots+a_n.\end{aligned}$$

9.30. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$x\ln x>\ln a+(x+1)\ln\frac{x+1}{a+1}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=x\ln x-\ln a-(x+1)\ln\frac{x+1}{a+1}$$

в области $\left[\dfrac{1}{a},+\infty\right)$: $f'(x)=\ln\dfrac{x(a+1)}{x+1}>0$, когда $x>\dfrac{1}{a}$, следовательно, функция $f(x)$ в заданной области возрастает, значит, при $x>\dfrac{1}{a}$ $f(x)>f\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$.

9.31. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\ln\dfrac{a_1^x+\ldots+a_n^x}{n}}{x}$$

в областях $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Имеем

$$f'(x)=\frac{\dfrac{a_1^x\ln a_1+\ldots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\ldots+a_n^x}\,x-\ln\dfrac{a_1^x+\ldots+a_n^x}{n}}{x^2}=\frac{n}{x^2\,(a_1^x+\ldots+a_n^x)}\times$$

$$\times\left(\frac{a_1^x\ln a_1^x+\ldots+a_n^x\ln a_n^x}{n}-\frac{a_1^x+\ldots+a_n^x}{n}\ln\frac{a_1^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)\geqslant 0,$$

так как функция $f(t)=t\ln t$ в области $(0;+\infty)$ выпуклая. Действительно, $f'(t)=\ln t+1$ и $f''(t)=\dfrac{1}{t}>0$.

Следовательно, когда $\alpha \geqslant \beta > 0$ или $0 > \alpha \geqslant \beta$, имеем

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

А когда $\alpha > 0 > \beta$, имеем

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \left(\sqrt[n]{a_1^\alpha \ldots a_n^\alpha}\right)^{1/\alpha} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

$$\left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \leqslant \left(\sqrt[n]{a_1^\beta \ldots a_n^\beta}\right)^{1/\beta} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

следовательно, $\left(\dfrac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \left(\dfrac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$.

9.32. а) Без ограничения общности можем принять, что $a \geqslant b$. В этом случае данные неравенства эквивалентны неравенствам

$$\frac{2\left(\frac{a}{b} - 1\right)}{\frac{a}{b} + 1} < \ln \frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Исследуем функцию $f(x) = \ln x - 2 \cdot \dfrac{x-1}{x+1}$ в области $[1, +\infty)$.

Имеем $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$ $(x > 1)$, следовательно, в области $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает и при $x > 1$ $f(x) > f(1) = 0$.

Взяв $x = \dfrac{a}{b}$, получим неравенство $\dfrac{2\left(\frac{a}{b} - 1\right)}{\frac{a}{b} + 1} < \ln \dfrac{a}{b}$. Для доказательства второго неравенства обозначим $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = x$ и в области $[1, +\infty)$ исследуем следующую функцию: $g(x) = 2\ln x - x + \dfrac{1}{x}$.

Имеем $g'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{x^2} < 0$ $(x > 1)$, следовательно, функция $g(x)$ в области $[1, +\infty)$ убывает: $g(x) < g(1) = 0$, т. е. $\ln \dfrac{a}{b} < \sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

б) Возьмем $a = x + 1$ и $b = 1$. Воспользовавшись неравенством из упр. 9.32, а), имеем

$$\frac{2x}{x+2} < \ln(x+1) < \frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

Остается заметить, что $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} < \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$.

в) Взяв $a = x$, $b = 1$ и воспользовавшись неравенством $\sqrt{ab} < \dfrac{a-b}{\ln a - \ln b}$, имеем $\sqrt{x} < \dfrac{x-1}{\ln x}$, откуда $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

г) Взяв $a = x + 1$, $b = x$ и воспользовавшись неравенством из упр. 9.32, а), имеем

$$\sqrt{x(x+1)} < \frac{1}{\ln \dfrac{x+1}{x}} < \frac{x + (x+1)}{2},$$

$$\frac{2}{2x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

Остается заметить, что $\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}} < \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$.

д) Написав неравенство $\dfrac{a-b}{\ln a - \ln b} < \dfrac{a+b}{2}$ для чисел x и y и приняв во внимание, что $\dfrac{a-b}{\ln a - \ln b} > 0$, имеем

$$\left|\frac{x-y}{\ln x - \ln y}\right| < \frac{x+y}{2}, \quad x \neq y,$$

или

$$|\ln x - \ln y| > \frac{2}{x+y} \cdot |x-y| \geqslant |x-y|,$$

так как $0 < x, y \leqslant 1$, а $x = y$; получим справедливое неравенство.

е) Пусть $I = (0, 1]$, $x_1 = y$, $x_2 = x$, $x_3 = 1$ и $f(x) = -\ln x$. Тогда из неравенства из упр. 7.12, а) следует, что

$$x \ln y - \ln y \geqslant y \ln x - \ln x > y \ln y - \ln x.$$

ж) Согласно неравенству из упр. 9.25, б) имеем

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{x-y} < 1 + \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y},$$

откуда получаем $\ln\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}$.

9.33. а) Обозначим

$$p_k(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Когда $x \leqslant 0$, имеем $p_k(x) > 0$.

Теперь докажем, что когда $x > 0$, имеем $p_k(x) - e^{-x} > 0$. При $k = 0$ имеем справедливое неравенство $p_0(x) - e^{-x} = 1 - e^{-x} > 0$. Предположим, что при $k = n$ (когда $x > 0$) неравенство $p_n(x) - e^{-x} > 0$ справедливо, и покажем, что оно справедливо и в случае $k = n + 1$. (То есть имеет место неравенство $p_{n+1}(x) - e^{-x} > 0$.)

Действительно, пусть $f(x) = p_{n+1}(x) - e^{-x}$; в этом случае $f''(x) = p_n(x) - e^{-x} > 0$, когда $x > 0$. Следовательно, $f'(x) > f'(0) = 0$, значит, в случае $x > 0$ $f(x) > f(0) = 0$. Таким образом, получили, что $p_k(x) > e^{-x}$, когда $x > 0$. Следовательно, при $x > 0$ имеем $p_k(x) > 0$.

б) Поскольку для всех x $p(x) \geqslant 0$, то n — четное число. С другой стороны, многочлен $F(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(n)}(x)$ имеет степень n. Нетрудно доказать, что $F(x)$ имеет наименьшее значение. Пусть $\min\limits_{(-\infty, +\infty)} F(x) = F(x_0)$, в таком случае $F'(x_0) = 0$. Таким образом,

$$F'(x_0) = P'(x_0) + P''(x_0) + \ldots + P^{(n)}(x_0) + P^{(n+1)}(x_0) = \\ = P'(x_0) + P''(x_0) + \ldots + P^{(n)}(x_0) = 0,$$

а $F(x_0) = P(x_0) + P'(x_0) + P''(x_0) + \ldots + P^{(n)}(x_0) = P(x_0) \geqslant 0$, следовательно, $F(x) \geqslant F(x_0) \geqslant 0$, т. е. $F(x) \geqslant 0$ для всех значений x.

Взяв $P(x) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, получаем

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots + 1 \geqslant 0$$

(упр. 9.33, а)).

9.34. Рассмотрим функцию

$$f(x) = a^r - b^r + x^r - (a - b + x)^r$$

в области $[0, b]$:

$$f'(x) = rx^{r-1} - r(a - b + x)^{r-1} = rx^{r-1}\left(1 - \left(1 + \frac{a-b}{x}\right)^{r-1}\right) \leqslant 0,$$

так как $\dfrac{a-b}{x} \geqslant 0$ и $r - 1 \geqslant 0$, и, значит, в области $[0, b]$ функция $f(x)$ не возрастает, поэтому $f(x) \geqslant f(b) = 0$, т. е. $f(c) \geqslant 0$ или $a^r - b^r + c^r \geqslant (a - b + c)^r$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Доказать неравенства 1–13, 16–18.

1. $2\sin x \geqslant \dfrac{\pi}{2} + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos x$, где $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

2. $\dfrac{x^p - 1}{p} > \dfrac{x^q - 1}{q}$, где $p > q > 0$.

3. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} > \dfrac{2}{3} n\sqrt{n}$, где $n \in \mathrm{N}$.

4. $e^x \geqslant x^e$, где $x > 0$.

5. $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > 1 - \dfrac{\alpha^2}{6}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

6. $2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha > 3\alpha$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

7. $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} > 0$, где $0 < x < \pi$.

8. $\left(\dfrac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geqslant \left(\dfrac{a}{b}\right)^{b}$, где $a,\ b > 0$.

9. $\dfrac{e^b - e^a}{b-a} < \dfrac{e^c - 1}{2c}(b+a) + 1$, где $0 \leqslant a < b \leqslant c$.

10. а) $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > \dfrac{\sin\beta}{\beta}$, где $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$, где $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

11. $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

12. $(\sin x)^{-2} \leqslant x^{-2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

13. а) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $x\cos x < 0{,}6$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x$, где $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

14. p_n и q_n являются периметрами правильных n-угольников, соответственно вписанных и описанных относительно окружности радиусом $\dfrac{1}{2}$. Разделим промежуток (p_n, q_n) на три равные части. В какой части находится число π?

15. Найдите такие действительные значения x, при которых $a^x \geqslant x^a$, где $x \geqslant 0$ и $a \geqslant 1$.

16. а) $\dfrac{a+b}{a+b+2ab} + \dfrac{a+c}{a+c+2} \geqslant \dfrac{2(b+1)(c+1)}{2bc+3b+c+2}$, где $a, b, c > 0$;

б) $\dfrac{a+b}{a+b+2ab} + \dfrac{c+d}{c+d+2cd} + \dfrac{a+c}{a+c+2} + \dfrac{b+d}{b+d+2} \geqslant 2$, где $a,\ b,\ c,\ d > 0$.

17. $x^p + x^{-p} + 2^p \leqslant (x + x^{-1})^p + 2$, где $x > 0$ и $p \geqslant 2$.

18. а) $\ln x > \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 4x + 1}$, где $x > 1$;

б) $\dfrac{a - b}{\ln a - \ln b} < \dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{ab} + \dfrac{a + b}{2}\right)$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

§ 10. МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

Пусть требуется доказать неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при некоторых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Преобразовав это неравенство к виду

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

исследуем зависимость от x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ функции

$$F(x_i) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ рассматриваются как постоянные).

П р и м е р 10.1. Доказать неравенство

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cos \frac{\pi}{n+1} \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$

где $n \in \mathrm{N}$, $n \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$F(x_1) = \cos \frac{\pi}{n+1}\, x_1^2 - x_2x_1 + (x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cos \frac{\pi}{n+1} - \\ - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n.$$

Она принимает свое наименьшее значение при $x_1 = \dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$, следовательно,

$$F(x_1) = \\ = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cos \frac{\pi}{n+1} - x_1x_2 - \ldots - x_{n-1}x_n \geqslant F\left(\frac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right).$$

Нетрудно доказать, что

$$F\left(\frac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right) = \left(\frac{\sin\dfrac{3\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{2\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\, x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \cos \frac{\pi}{n+1} - \\ - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n.$$

Рассмотрим квадратичную функцию $G(x_2) = F\left(\dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right)$, получим

$$G(x_2) \geqslant G\left(\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{3\pi}{n+1}}\, x_3\right) = \left(\frac{\sin\dfrac{4\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{3\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\, x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \times$$
$$\times \cos\frac{\pi}{n+1} - x_3x_4 - \ldots - x_{n-1}x_n.$$

Проведя аналогичные рассуждения для переменных $x_3, \ldots, x_n$, получим

$$F(x_1) \geqslant G(x_2) \geqslant \ldots \geqslant \frac{\sin\dfrac{(n+1)\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{n\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\, x_n^2 \cos\frac{\pi}{n+1} = 0,$$

следовательно,

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\cos\frac{\pi}{n+1} \geqslant x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n.$$

При доказательстве некоторых неравенств можно использовать следующие с в о й с т в а ф у н к ц и й.

1°. Если функция $f(x)$ определена в области $[a, b]$ и убывает в области $[a, c]$, а в области $[c, b]$ возрастает, тогда в области $[d, e]$ функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение в одной из граничных точек области $[d, e]$ $(a \leqslant d < e \leqslant b)$.

2°. Если функция $f(x)$ определена в области $[a, b]$ и в области $[a, c]$ возрастает, а в области $[c, b]$ убывает, то в области $[d, e]$ функция $f(x)$ принимает свое наименьшее значение в одной из граничных точек области $[d, e]$ $(a \leqslant d < e \leqslant b)$.

Нетрудно заметить, что если функция $f'(x)$ в области $[a, b]$ возрастает, то функция $f(x)$ в области $[a, b]$ принимает наибольшее значение в точках a или b, а если $f'(x)$ убывает в области $[a, b]$, то функция $f(x)$ в области $[a, b]$ принимает наименьшее значение в точке a или b.

Эти свойства функций можно использовать при доказательстве некоторых неравенств.

П р и м е р 10.2. Доказать неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2b + b^2c + c^2a + 1,$$

где $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $f(a) = a^2(1-b) - c^2a + b^2 + c^2 - bc^2 - 1$ в области $[0, 1]$.

Если $b \neq 1$, то $f(a)$ является квадратным трехчленом по a, ветви графика которого направлены вверх. Следовательно, функция $f(a)$ принимает наибольшее значение в одной из точек на концах отрезка $[0,1]$. Поскольку

$$f(0) = b^2 + c^2 - b^2c - 1 = (1-c)(b^2 - (1+c)) \leqslant 0,$$
$$f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - b^2c - 1 = b(b-1) - b^2c \leqslant 0,$$

то на отрезке $[0,1]$ $f(a) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Если $b = 1$, то доказательство проводится аналогично.

П р и м е р 10.3. Доказать неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leqslant 1,$$

где $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим монотонную функцию

$$f(x) = x + x_2 + x_3 - xx_2 - x_2x_3 - xx_3 = x(1 - x_2 - x_3) + x_2 + x_3 - x_3x_2,$$

которая принимает наибольшее значение в одной крайних точек отрезка $[0,1]$:

$$f(0) = x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 + (1-x_3)(x_2-1) \leqslant 1,$$
$$f(1) = 1 - x_3 - x_2 + x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 - x_2x_3 \leqslant 1.$$

Следовательно, на отрезке $[0,1]$ $f(x) \leqslant 1$ или же $f(x_1) = x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leqslant 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать неравенства 10.2–10.10.

10.1. Докажите, что если неравенство $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ имеет место для всех чисел отрезка $[-1,1]$, то для этих x имеет место также неравенство $|cx^2 - bx + a| \leqslant 2$.

10.2. $(a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ac)$, где a, b и c — стороны некоторого треугольника.

10.3. $\dfrac{a}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+a+1} + \dfrac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$, где $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$.

10.4. $(a+b+c+d+e)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e}\right) \leqslant 25 + 6\left(\sqrt{\dfrac{p}{q}} - \sqrt{\dfrac{q}{p}}\right)^2$, где $0 < p \leqslant a, b, c, d, e \leqslant q$.

10.5. а) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i b_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_i a_i b_i$ (неравенство Чебышева), где $a_i \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$, $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

б) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i b_i\right) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_i a_i b_i$, где $a_i \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$, $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

10.6. $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant -2$ и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одного знака.

10.7. $(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2$, где $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, $0 < a < b$.

10.8. $\frac{(1-a)(1-b)}{ab} \geqslant \frac{(1-c)(1-a-b+c)}{c(a+b-c)}$, где $0 < a \leqslant c \leqslant b$, $a + b < 1$.

10.9. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geqslant \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+\frac{ab}{m}}$, где $1 < a < m < b$.

10.10. $abc \leqslant \frac{1}{8}(pa + qb + rc)$, где $a, b, c > 0$, $p, q, r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $a + b + c = p + q + r = 1$.

РЕШЕНИЯ

10.1. Имеем

$$|cx^2 - bx + a| \leqslant |cx^2 - c| + |c - bx + a| = \\ = |c|(1 - x^2) + |c - bx + a| \leqslant |c| + |c - bx + a|.$$

Если $x = 0$, то из неравенства $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ следует, что $|c| \leqslant 1$. Таким образом, $|cx^2 - bx + a| \leqslant 1 + |c - bx + a|$.

Остается заметить, что функция $f(x) = |c - bx + a|$ на отрезке $[-1, 1]$ принимает наибольшее значение в одной из крайних точек. Следовательно,

$$f(x) \leqslant \max(f(-1), f(1)) = \max(|c + b + a|, |c - b + a|) \leqslant 1,$$

т. е. $|cx^2 - bx + a| \leqslant 1 + 1 = 2$.

10.2. Поскольку a, b и c — стороны треугольника, то $|b-c| < a < b+c$. Без ограничения общности можем считать, что $b \geqslant c$.

Рассмотрим функцию $f(a) = (a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ac)$ в области $[b-c, b+c]$.

Имеем $f(a) = a^2 - 2a(b+c) + b^2 + c^2 - 2bc$. Графиком этой функции является парабола с ветвями направленными вверх. Следовательно, в заданной области $f(a)$ принимает свое наибольшее значение в одной из точек $b-c$, $b+c$:

$$f(b-c) = 4c(c-b) \leqslant 0, \qquad f(b+c) = -4bc < 0.$$

Таким образом, в области $(b-c, b+c)$ $f(a) < 0$.

10.3. Рассмотрим функцию

$$f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

в области $[0,1]$. Очевидно, что производная

$$f'(a) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(c+a+1)^2} - \frac{c}{(a+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$$

в области $[0,1]$ возрастает, следовательно, она обладает свойством 1°, т.е. $f(a)$ принимает наибольшее значение в одной из точек 0 или 1.

Мы фактически доказали, что функция $f(a)$ принимает наибольшее значение в одной из точек $a=0$, $a=1$. Заменив a на 0 или 1 и далее рассматривая полученную функцию как функцию b, получим, что она тоже принимает наибольшее значение в одной из точек $b=0$, $b=1$ соответственно.

Поскольку рассматриваемое неравенство симметрично относительно a, b и c, то получим, что выражение в левой части неравенства примет наибольшее значение в случае одного из троек $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$. Во всех случаях левая часть данного неравенства равна 1.

10.4. Рассмотрим функцию

$$f(a) = (a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right),$$

или $f(a) = Aa + \dfrac{B}{a} + AB + 1$, где $A = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e}$, $B = b+c+d+e$.

Поскольку $f'(a) = A - \dfrac{B}{a^2}$ $(B > 0)$, то $f(a)$ возрастает в области $[p, q]$, следовательно, она принимает наибольшее значение в одной из точек p, q. Из сказанного ясно, что $f(a) \leqslant \max(f(p), f(q))$.

Теперь рассмотрим функцию

$$g(b) = (p+b+c+d+e)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)$$

или $h(b)=(q+b+c+d+e)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$ на отрезке $[p,q]$.

Аналогично получим, что

$$g(b)\leqslant \max\left(g(p),g(q)\right) \quad \text{и} \quad h(b)\leqslant \max\left(h(p),h(q)\right).$$

Продолжая эти рассуждения относительно переменных c, d и e, получим, что выражение принимает свое наибольшее значение в том случае, когда некоторые из переменных равны p, а остальные — q.

Таким образом,

$$f(a)=(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leqslant$$
$$\leqslant (mp+nq)\left(m\frac{1}{p}+n\frac{1}{q}\right),$$

где $m,n\geqslant 0$, $m+n=5$, $m,n\in Z$.

Теперь докажем неравенство

$$(mp+nq)\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Действительно,

$$m^2+n^2+\frac{mnp}{q}+\frac{mnq}{p}\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$
$$(m+n)^2+mn\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2\right)\leqslant 25+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2\right),$$
$$25+mn\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2\right)\leqslant 25+6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2\right),$$

так как нетрудно заметить, что $mn\leqslant 6$.

З а м е ч а н и е. Неравенство из упр. 10.4 обобщается следующим образом.

Докажите, что если $0<p<a_1,a_2,\ldots,a_n<q$, то имеет место неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant n^2+\psi(n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

где

$$\psi(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}, & n=2k \quad (k=1,2,\ldots),\\[2mm] \dfrac{(n^2-1)}{4}, & n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\ldots).\end{cases}$$

Сначала ознакомьтесь с упр. 10.7.

10.5. а) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(m_2 x + \sum_{i=1; i\neq 2}^{n} m_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i b_i\right) - \sum_{i=1; i\neq 2}^{n} m_i a_i b_i - m_2 x b_2$$

в области $[a_1, a_3]$. Поскольку $f(x)$ — линейная функция, то она свое наибольшее значение принимает в одной из точек a_1, a_3. В выражении $M = f(a_2)$ заменим a_2 на a_1 или a_3 и в полученном выражении заменим a_3 на x и аналогично докажем, что это выражение принимает наибольшее значение в одной из точек a_1, a_4. Продолжая эти рассуждения для чисел $a_4, \ldots, a_{n-1}$, $b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$, получим

$$M \leqslant (\alpha a_1 + \beta a_n)(\gamma b_1 + \delta b_n) - k a_1 b_1 - (a - k) a_1 b_n - \\ - (\delta - \alpha + k)\, a_n b_n - (\beta + \alpha - \delta - k)\, a_n b_1,$$

где $\alpha(\gamma)$ — сумма тех m_i, соответствующие которым a_i (b_i) заменили на a_1 (b_1) и $\alpha + \beta = 1$, $\gamma + \delta = 1$, $k = \min(\alpha, \gamma)$.

Имеем

$$M \leqslant \alpha\gamma a_1 b_1 + (\alpha\delta - \alpha)\, a_1 b_n + (\beta\gamma - \beta - \alpha + \delta)\, a_n b_1 + \\ + (\beta\delta - \delta + \alpha)\, a_n b_n - k a_1 b_1 + k a_1 b_n + k a_n b_1 - k a_n b_n = \\ = \alpha\gamma a_1 b_1 - \alpha\gamma a_1 b_n - \alpha\gamma a_n b_1 + \alpha\gamma a_n b_n - k\,(a_1 - a_n)\,(b_1 - b_n) = \\ = (\alpha\gamma - k)\,(a_1 - a_n)\,(b_1 - b_n) \leqslant 0,$$

так как $k = \alpha$ или $k = \gamma$ и $0 \leqslant \alpha, \gamma \leqslant 1$.

б) Запишем неравенство а) этого упражнения для чисел $a_1 \leqslant \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $-b_1 \leqslant -b_2 \leqslant \ldots \leqslant -b_n$. Получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\,(-b_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i a_i\,(-b_i);$$

умножив обе части последнего на -1, получим рассматриваемое неравенство.

10.6. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, то в этом случае достаточно раскрыть скобки в левой части неравенства.

Если $-2 \leqslant a_1, a_2, \ldots a_n < 0$, рассмотрим функцию

$$f(x) = (1 + x)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) - 1 - x - a_2 - \ldots - a_n$$

на отрезке $[-2, 0]$. Поскольку это линейная функция, то она принимает свое наименьшее значение в области в одной из точек -2, 0.

Нетрудно убедиться, что из указанных фактов следует, что выражение $(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) - 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$ принимает наименьшее значение в том случае, когда некоторые из чисел равны -2, а остальные — 0. Таким образом, когда $a_1 = \ldots = a_n = 0$, имеем

$$(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) - 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n = 1 - 1 = 0.$$

Если некоторые из чисел равны -2, получим

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n)-1-a_1-a_2-\ldots-a_n=(-1)^k-1+2k\geqslant 0,$$

где k — количество -2.

10.7. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(x+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

в области $[a,b]$. Эту функцию можно записать в виде

$$f(x)=1+\frac{A}{x}+Bx+AB,$$

где $A=x_2+\ldots+x_n$, $B=\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}$.

Поскольку $f'(x)=B-\dfrac{A}{x^2}$ $(B>0)$, то $f'(x)$ возрастает на $[a,b]$, следовательно, она принимает наибольшее значение в одной из точек a, b. Отсюда $f(x_1)\leqslant\max(f(a),f(b))$.

Аналогично, рассматривая функцию

$$g(x)=(b+x+x_3+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right),$$

или

$$g(x)=(a+x+x_3+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

в области $[a,b]$, получим $g(x_2)\leqslant\max(g(a),g(b))$.

Повторяя то же самое для переменных $x_3,\ldots,x_n$, получим, что выражение $(x_1+\ldots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right)$ примет наибольшее значение, когда часть переменных будет равна a, а остальная часть — b.

Примем $x_1=\ldots=x_k=a$, $x_{k+1}=\ldots=x_n=b$.

Остается доказать, что $(ka+(n-k)b)\left(\dfrac{k}{a}+\dfrac{n-k}{b}\right)\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4ab}\cdot n^2$. Справедливость последнего вытекает из эквивалентного ему неравенства $((n-2k)a-(n-2k)b)^2\geqslant 0$.

10.8. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(1-x)(1-a-b+x)}{x(a+b-x)}$ в области $[a,b]$. Нетрудно убедиться, что

$$f(x)=\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}\right)+1.$$

Имеем $f'(x)=\dfrac{(2x-(a+b))(a+b)}{x^2(a+b-x)^2}\left(\dfrac{1}{a+b}-1\right)$, следовательно, функция $f(x)$ убывает в области $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$, а в области $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ возрастает. Это означает, что в области $[a,b]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение в одной из точек a, b.

Поскольку $f\,(a) = f\,(b) = \dfrac{(1-a)\,(1-b)}{ab}$, то

$$f\,(x) \leqslant \frac{(1-a)\,(1-b)}{ab},$$

где, приняв $x = c$, получим заданное неравенство.

10.9. Рассмотрим функцию

$$f\,(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\dfrac{ab}{x}} = \frac{1}{1+x} + 1 - \frac{ab}{x+ab}$$

в области $[a, b]$.

Так как $f'\,(x) = \dfrac{(ab-1)\,(x-\sqrt{ab})(x+\sqrt{ab})}{(x+1)^2\,(x+ab)^2}$, то в области $[a, \sqrt{ab}]$ функция $f(x)$ убывает, а в $[\sqrt{ab}, b]$ возрастает, следовательно,

$$f(x) \leqslant \max\,(f(a), f(b))\,.$$

Поскольку $f\,(a) = f\,(b) = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}$ и $a \leqslant m \leqslant b$, то $f\,(m) \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}$.

10.10. Заметим, что $\dfrac{1}{2} - q \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$; тогда для функции $f(p) =$ $= pa + qb + (1-p-q)c$ имеем

$$\begin{aligned} f(p) \geqslant \min\left[f\left(\frac{1}{2}-q\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] &= \\ = \min\left[\left(\frac{1}{2}-q\right)a + qb + \frac{1}{2}\,c,\ \frac{1}{2}a + qb + \left(\frac{1}{2}-q\right)c\right] &\geqslant \\ \geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,c;\ \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,c;\ \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b\right). \end{aligned}$$

Пусть $\min\left(\dfrac{1}{2}\,a + \dfrac{1}{2}\,c;\ \dfrac{1}{2}\,b + \dfrac{1}{2}\,c;\ \dfrac{1}{2}\,a + \dfrac{1}{2}\,b\right) = \dfrac{1}{2}\,(a+c)$, следовательно,

$$\begin{aligned} pa + qb + rc \geqslant \frac{1}{2}\,(a+c) \geqslant (a+c)\,2\,(a+c)\,(1-(a+c)) &= \\ = 2\,(a+c)^2\,b \geqslant 8abc. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства 2–13, 15–20.

1. Известно, что $0 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ и что также имеет место тождество $(px+(1-p)y)(rx+(1-r)y) = ax^2+bxy+cy^2$. Докажите, что одно из чисел a, b, c не меньше $\dfrac{4}{9}$.

2. $x_1 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, где $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$ и $n \geqslant 3$, $n \in \mathrm{N}$.

3. $(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2 \geqslant 4(x_1^2+\ldots+x_n^2)$, где $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.

4. $\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2} \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{AB}{ab}} + \sqrt{\dfrac{ab}{AB}}}{2}\right)^2$, где $0 < a \leqslant a_i \leqslant A$, $0 < b \leqslant b_i \leqslant B$, $i = 1, \ldots, n$.

5. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4)$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

6. а) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + x + y + z + \frac{3}{8} \geqslant 0$;

б) $xy(1-z) + yz(1-x) + xz(1-y) \leqslant 1$, где $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

7. $2^n \geqslant (1+a_1)\ldots(1+a_n)+(1-a_1)\ldots(1-a_n) \geqslant 2$, где $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

8. $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} < 1 + 2^{a+b+c+1}$, где $a, b, c > 0$.

9. $\min\left[(a-b)^2, (b-c)^2, (a-c)^2\right] \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

10. $a^4 + ab + b^2 \geqslant 4a^2b + a^3b$, где $a, b \geqslant 0$.

11. $aB + bC + cA < k^2$, где $a, b, c, A, B, C > 0$ и $a + A = b + B = c + C = k$.

12. $(1 - x_1x_2\ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)\ldots(1 - y_n^m) \geqslant 1$, где $0 \leqslant x_i, y_i$, $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m \in \mathrm{N}$.

13. $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant 2$, где $a, b, c \in [0,1]$.

14. Докажите, что периметр любого четырехугольного сечения правильного тетраэдра с ребром a меньше $3a$.

15. $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{x_i}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{M}{m}} + \sqrt{\dfrac{m}{M}}\right)^2$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$ и $0 < m \leqslant x_i \leqslant M$, $i = 1, \ldots, n$.

16. $8ac + 8bd \leqslant 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 + ab + bc + cd + da$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

17. а) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c} \leqslant a+b-2$, где $2 \leqslant a, b, c \leqslant 3$;

б) $$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3} + \frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4} + \ldots + \frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2} \leqslant$$
$$\leqslant 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n - 2n,$$
где $n \geqslant 3$, $2 \leqslant a_i \leqslant 3$, $i = 1, \ldots, n$.

18. $\dfrac{1}{2} < \dfrac{a(c-d)+2d}{b(d-c)+2c} \leqslant 2$, где $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 2$.

19. $\alpha\gamma - \beta^2 \leqslant 0$, где $a\gamma - 2b\beta + c\alpha = 0$ и $ac - b^2 > 0$.

20. $$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 - b_2 - \ldots - b_n)^2 +$$
$$+ 2|a_1b_2 - a_2b_1| + 2|a_1b_3 - a_3b_1| + \ldots + 2|a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1^2 - b_1^2| + |a_2^2 - b_2^2| + \ldots + |a_n^2 - b_n^2| +$$
$$+ 2|a_1a_2 - b_1b_2| + 2|a_1a_3 - b_1b_3| + \ldots + 2|a_{n-1}a_n - b_{n-1}b_n|,$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ и $n \geqslant 2$.

§ 11. МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ЙЕНСЕНА

Т е о р е м а 11.1 [*]. *Если имеет место неравенство*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (11.1)$$

$$\left[\textit{соответственно } \frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \qquad (11.2)$$

для любых чисел a *и* b *из области* $D(f) = I$, *то для любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Q_+$, *где* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, *и любых чисел* $x_1, \ldots, x_n \in I$ *имеет место неравенство* [**]

$$\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \qquad (11.3)$$

$$[\textit{соответственно } \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \leqslant f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)]. \qquad (11.4)$$

П р и м е р 11.1. Доказать неравенство

$$\frac{\cos x_1 + \ldots + \cos x_n}{n} \leqslant \cos\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

где $x_1, \ldots, x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для любых чисел $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет место условие (11.2) теоремы (11.1), т. е.

$$\frac{\cos a + \cos b}{2} \leqslant \cos\frac{a+b}{2}.$$

Действительно, $\frac{\cos a + \cos b}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \leqslant \cos\frac{a+b}{2}$. Считая, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, и воспользовавшись неравенством (11.4), получим

$$\frac{1}{n}(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n) \leqslant \cos\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Т е о р е м а 11.2 [***]. *Если для любых чисел* a *и* b *из интервала* $D(f) = I$ *и любых* α, β *таких, что* $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, *имеет место неравенство*

$$\alpha f(a) + \beta f(b) \geqslant f(\alpha a + \beta b) \qquad (11.5)$$

---

[*] Доказательство см. в упр. 7.8.

[**] Это неравенство называется неравенством Йенсена.

[***] Доказательство см. в упр. 7.9.

$$[\textit{соответственно} \ \ \alpha f(a)+\beta f(b) \leqslant f(\alpha a+\beta b)], \tag{11.6}$$

то для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $x_1,\ldots,x_n$ *имеет место неравенство*

$$\alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n) \tag{11.7}$$

$$[\textit{соответственно} \ \ \alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n) \leqslant f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n)], \tag{11.8}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geqslant 0$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$, *а* $x_1,\ldots,x_n \in I$.

Заметим, что если в области I функция $f(x)$ удовлетворяет условию (11.5), то будем говорить что она в этой области выпуклая, а если удовлетворяет условию (11.6), то будем говорить, что функция вогнутая.

Теорема 11.3. *Если для* $f(x)$ *функции в области* $D(f)=I$ *имеет место условие*

$$f''(x) \geqslant 0 \tag{11.9}$$

$$[\textit{соответственно} \ \ f''(x) \leqslant 0], \tag{11.10}$$

то имеет место также условие (11.7) [*соответственно* (11.8)].

Доказательство. Пусть имеет место условие (11.9). Сначала докажем, что имеет место (11.5).

Действительно, воспользовавшись формулой конечных приращений находим, что

$$\begin{aligned}
&\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)= \\
&\quad =\alpha\left(f(x_1)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\right)+\beta\left(f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)\right)= \\
&\quad =\alpha f'(c_1)(x_1-\alpha x_1-\beta x_2)+\beta f'(c_2)(x_2-\alpha x_1-\beta x_2)= \\
&\quad =\alpha\beta\left(f'(c_2)-f'(c_1)\right)(x_2-x_1)=\alpha\beta f''(c)(c_2-c_1)(x_2-x_1),
\end{aligned}$$

где $x_1<c_1<\alpha x_1+\beta x_2<c_2<x_2$ и $c_1<c<c_2$.

Следовательно, знак левой части совпадает со знаком $f''(c)$, что означает, что (11.5) справедливо.

Согласно теореме 11.2 справедливо также (11.7).

Пример 11.2. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^k\right)^{k-1} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i^{k-1}\right)^k,$$

где $a_i, c_i > 0$, $i=1,\ldots,n$ и $k \notin (0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x^k$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(x) = k(k-1)x^{k-2} \geqslant 0$, то, приняв $\alpha_i = \dfrac{c_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^k}$, $x_i = \left(\dfrac{a_i}{c_i}\right)^k$, где $i = 1, \ldots, n$, согласно теореме 11.3 получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{c_i}\right)^k \frac{c_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^k} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{c_i} \frac{c_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^k}\right)^k,$$

откуда и получается данное неравенство.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 11.1–11.21.

11.1. $\dfrac{\sin x_1 + \ldots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, где $x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi]$.

11.2. $\dfrac{a+b+c}{3} \leqslant a^{a/(a+b+c)} \cdot b^{b/(a+b+c)} \cdot c^{c/(a+b+c)} \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, где $a, b, c \in \mathrm{N}$.

11.3. $\left(1 + \dfrac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \dfrac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \dfrac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника и $a, b, c \in Q$.

11.4. $a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geqslant 0$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

11.5. $a^3 b + b^3 c + c^3 a \geqslant a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$, где $a, b, c > 0$.

11.6. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) \geqslant 64$, где $x, y, z > 0$ и $x + y + z = 1$.

11.7. $\dfrac{12}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{d}} + \dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{d}} + \dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}$, где $a, b, c, d > 0$.

11.8. $\dfrac{m^p}{p} + \dfrac{n^q}{q} \geqslant mn$, где $m, n, p, q > 0$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

11.9. $$\sqrt{a}(a+c-b) + \sqrt{b}(a+b-c) + \sqrt{c}(b+c-a) \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)},$$

где a, b и c — стороны некоторого треугольника.

11.10. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2\right) \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i\right)^2.$

11.11. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^k\right)^{k-1} \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i^{k-1}\right)^k$, где $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n > 0$ и $0 < k < 1$.

11.12. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$, где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots$ $\ldots, b_n > 0$, $p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

11.13. $$\frac{a_1}{-a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 - a_2 + \ldots + a_n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_n} \geqslant \frac{n}{n-2},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны некоторого n-угольника.

11.14. $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^m}{n} \, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^m}{n} \geqslant \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i b_i}{n}\right)^m$, где $d_1, \ldots, d_n, b_1, \ldots, b_n > 0$ и $m \geqslant 2$.

11.15. а) $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_3} \geqslant \dfrac{3}{2}$, где $x_1, x_2, x_3 > 0$;

б) $\dfrac{x_1}{x_2 + x_n} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \dfrac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geqslant 2$, где $n \geqslant 4$, $x_1, \ldots, x_n > 0$.

11.16. $\left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}\right| \leqslant 2\left(1 - \dfrac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, где x, y, z — стороны некоторого треугольника.

11.17. а) $\dfrac{a}{b + c + d} + \dfrac{b}{a + c + d} + \dfrac{c}{a + b + d} + \dfrac{d}{a + b + c} \geqslant \dfrac{4}{3}$, где $a, b, c, d > 0$;

б) $$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

где $n > 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

11.18. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+d}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2$, где $a,b,c,d>0$.

11.19. $a+b+c\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2}{2a}+\dfrac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}$, где $a,b,c>0$.

11.20. $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$, где $a,b,c>0$.

11.21. $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{a+b}\leqslant\left(\dfrac{a}{c}\right)^a\cdot\left(\dfrac{b}{d}\right)^b$, где $a,b,c,d>0$.

11.22. Рассмотрите последовательность с положительных членами (x_n), в которой $1=x_0\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant\ldots$ Докажите, что существует такое n, что для любой такой последовательности (x_n)

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3{,}999.$$

11.23. Из внутренней точки M треугольника ABC проведены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 к сторонам BC, CA и AB соответственно. Для какой точки M треугольника ABC величина $\dfrac{BC}{MA_1}+\dfrac{CA}{MB_1}+\dfrac{AB}{MC_1}$ примет наименьшее значение?

11.24. Пусть $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n>0$ и $J\subset\{1,\ldots,n\}$. Известно, что для любого J $\sum\limits_{i\in J}b_i\geqslant\Bigl(\sum\limits_{i\in J}a_i\Bigr)^m$, где $m\in\mathrm{N}$. Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{m+1}.$$

РЕШЕНИЯ

11.1. Для любых чисел $a,b\in[0,\pi]$ имеет место условие

$$\frac{\sin a+\sin b}{2}\leqslant\sin\frac{a+b}{2}.$$

Действительно, $\dfrac{\sin a+\sin b}{2}=\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}\leqslant\sin\dfrac{a+b}{2}$. Взяв $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ и воспользовавшись неравенством (11.4), получим $\dfrac{1}{n}(\sin x_1+\ldots+\sin x_n)\leqslant\sin\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

11.2. Поскольку для любых чисел $a, b > 0$ имеет место неравенство $\frac{\lg a + \lg b}{2} \leqslant \lg \frac{a+b}{2}$, то, взяв $\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c}$, $\alpha_2 = \frac{b}{a+b+c}$, $\alpha_3 = \frac{c}{a+b+c}$, согласно неравенству (11.4) имеем $\alpha_1 \lg a + \alpha_2 \lg b + \alpha_3 \lg c \leqslant \lg(\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c)$, откуда

$$a^{a/(a+b+c)} b^{b/(a+b+c)} c^{c/(a+b+c)} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = x \ln x$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, то для функции $f(x)$ имеет место (11.7). Взяв $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$, имеем

$$\frac{1}{3}(a \ln a + b \ln b + c \ln c) \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3},$$

откуда $a^a b^b c^c \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$, или

$$a^{a/(a+b+c)} b^{b/(a+b+c)} c^{c/(a+b+c)} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

11.3. Пусть $f(x) = \lg x$, $x_1 = 1 + \frac{b-c}{a}$, $x_2 = 1 + \frac{c-a}{b}$, $x_3 = 1 + \frac{a-b}{c}$, $\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c}$, $\alpha_2 = \frac{b}{a+b+c}$, $\alpha_3 = \frac{c}{a+b+c}$; получим

$$\frac{1}{a+b+c}\left[a \lg\left(1 + \frac{b-c}{a}\right) + b \lg\left(1 + \frac{c-a}{b}\right) + c \lg\left(1 + \frac{a-b}{c}\right)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \lg\left[\frac{a}{a+b+c}\left(1 + \frac{b-c}{a}\right) + \frac{b}{a+b+c}\left(1 + \frac{c-a}{b}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{c}{a+b+c}\left(1 + \frac{a-b}{c}\right)\right],$$

откуда $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1$.

11.4. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Нетрудно проверить, что для любых чисел m и n имеет место неравенство

$$\alpha f(m) + \beta f(n) \geqslant f(\alpha m + \beta n), \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

Согласно теореме 11.2 имеет место неравенство (11.7), где, взяв $x_1 = c$, $x_2 = b$, $x_3 = a$, $\alpha_1 = \frac{a+c-b}{a+b+c}$, $\alpha_2 = \frac{b+c-a}{a+b+c}$, $\alpha_3 = \frac{a+b-c}{a+b+c}$, получим

$$c^2 \frac{a+c-b}{a+b+c} + b^2 \frac{b+c-a}{a+b+c} + a^2 \frac{a+b-c}{a+b+c} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{ac + c^2 - bc + b^2 + bc - ab + a^2 + ab - ac}{a + b + c}\right)^2,$$

откуда

$$c^2\left((a+c)^2 - b^2\right) + b^2\left((b+c)^2 - a^2\right) + a^2\left((a+b)^2 - c^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2,$$

или $a^2b\,(a-b) + b^2c\,(b-c) + c^2a\,(c-a) \geqslant 0$.

11.5. Указание. Принять $f(x) = x^2$, $x_1 = a + b - c$, $x_2 = a + c - b$, $x_3 = b + c - a$, $\alpha_1 = \dfrac{a}{a+b+c}$, $\alpha_2 = \dfrac{b}{a+b+c}$, $\alpha_3 = \dfrac{c}{a+b+c}$.

Второй способ. Заметим, что

$$a^3b + b^3c + c^3a - (a^2bc + b^2ca + c^2ab) =$$
$$= ab\,(a-c)^2 + bc\,(b-a)^2 + ac\,(b-c)^2 \geqslant 0.$$

11.6. Рассмотрим функцию $f(t) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$, то имеет место неравенство (11.7). Взяв $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{3}$, $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$, получим

$$\frac{1}{3}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right] \geqslant \ln\left(1 + \frac{3}{x+y+z}\right),$$

откуда, приняв во внимание, что $x + y + z = 1$, получим

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant \left(1 + \frac{3}{x+y+z}\right)^3 = 64.$$

11.7. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку имеет место неравенство $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant \dfrac{2}{a+b}$, то согласно теореме 1, взяв $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x_2 = \sqrt{a} + \sqrt{c}$, $x_3 = \sqrt{a} + \sqrt{d}$, $x_4 = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $x_5 = \sqrt{b} + \sqrt{d}$, $x_6 = \sqrt{c} + \sqrt{d}$; $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_6 = \dfrac{1}{6}$, получим данное неравенство.

11.8. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, то имеет место (11.6) неравенство, где, взяв $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$, $a = m^p$, $b = n^q$, получим данное неравенство.

11.9. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в области $(0, +\infty)$. Нетрудно проверить, что для функции $f(x)$ имеет место условие (11.10).

Взяв $\alpha_1 = \dfrac{a+c-b}{a+b+c}$, $\alpha_2 = \dfrac{a+b-c}{a+b+c}$, $\alpha_3 = \dfrac{c+b-a}{a+b+c}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, приведем неравенство (11.8) к данному виду.

З а м е ч а н и е. При $a = 9$, $b = 4$, $c = 1$ неравенство неверно.

11.10. Пусть $c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Поскольку $f''(x) > 0$, то, взяв $\alpha_i = \dfrac{c_i^2}{c_1^2 + \ldots + c_n^2}$, $x_i = \left(\dfrac{a_i}{c_i}\right)^2$, где $i = 1, \ldots, n$, согласно теореме 11.3 получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{c_i}\right)^2 \frac{c_i^2}{c_1^2 + \ldots + c_n^2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{c_i} \frac{c_i^2}{c_1^2 + \ldots + c_n^2}\right)^2,$$

откуда и получается данное неравенство.

Когда $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, получим очевидное неравенство.

11.11. Доказательство аналогично примеру 11.2 с учетом того, что $f''(x) < 0$.

11.12. Доказательство аналогично примеру 11.2 с заменой k на p и c_i на $b_i^{q/p}$.

11.13. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в области $(0, +\infty)$.

Взяв $x_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i + \ldots + a_n$, $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_1 + \ldots + a_n}$, где $i = 1, \ldots, n$ (11.7), получим

$$\frac{1}{a_1 + \ldots + a_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i + \ldots + a_n} \geqslant$$

$$\geqslant (a_1 + \ldots + a_n) \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i (a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i + \ldots + a_n)},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i + \ldots + a_n} \geqslant$$

$$\geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 \frac{1}{(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 2(a_1^2 + \ldots + a_n^2)} \geqslant \frac{n}{n-2},$$

так как $n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2$ (см. упр. 2.2).

11.14. В неравенстве примера 11.2, приняв $c_i = 1$, получим

$$n^{k-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k,$$

откуда, взяв $k = \dfrac{m}{2}$, $a_i = d_i^2$, получим $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^m \geqslant \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2\right)^{m/2}$.

Аналогично получим также неравенство $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^m \geqslant \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{m/2}$.

Почленно перемножая полученные неравенства и воспользовавшись неравенством из упр. 11.10, получим

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^m}{n}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^m}{n} \geqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}{n^2}\right)^{m/2} \geqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i d_i}{n}\right)^{m}.$$

11.15. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в области $(0, +\infty)$.

а) Взяв $\alpha_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3}$, $i = 1, 2, 3$, имеем

$$\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}\,\frac{1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}\,\frac{1}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}\,\frac{1}{x_1+x_2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}(x_2+x_3) + \dfrac{x_2}{x_1+x_2+x_3}(x_1+x_3) + \dfrac{x_3}{x_1+x_2+x_3}(x_1+x_2)},$$

откуда $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} + \dfrac{x_2}{x_1+x_3} + \dfrac{x_3}{x_1+x_2} \geqslant \dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}$.

Согласно неравенству $\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3} \geqslant \left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2$, или $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$, имеем

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)} = \frac{1}{2}\,\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3} + 1 \geqslant \frac{3}{2},$$

откуда $\dfrac{x_1}{x_2+x_3} + \dfrac{x_2}{x_1+x_3} + \dfrac{x_3}{x_1+x_2} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

б) Взяв $\alpha_i = \dfrac{x_i}{(x_1 + \ldots + x_n)}$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\frac{x_1}{x_1+\ldots+x_n}\,\frac{1}{x_2+x_n} + \frac{x_2}{x_1+\ldots+x_n}\,\frac{1}{x_1+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+\ldots+x_n} \times$$
$$\times \frac{1}{x_1+x_{n-1}} \geqslant \frac{1}{\dfrac{x_1(x_2+x_n) + x_2(x_3+x_1) + \ldots + x_n(x_1+x_{n-1})}{x_1+\ldots+x_n}},$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2+x_n} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{x_1x_2+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_1+\ldots+x_n(x_1+x_{n-1})} =$$

$$= \frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1)} \geqslant 2$$

(см. решение упр. 7.6).

Следовательно, $\dfrac{x_1}{x_2+x_n}+\dfrac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_1+x_{n-1}} \geqslant 2.$

11.16. Пусть $A=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}-\dfrac{y}{x}-\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z} \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в области $(0,+\infty)$. Возьмем

$$\alpha_1=\frac{y+z-x}{y+z+x},\qquad \alpha_2=\frac{y+x-z}{y+z+x},\qquad \alpha_3=\frac{z+x-y}{y+z+x}.$$

В этом случае

$$\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{y+z-x}{y}+\frac{x+y-z}{x}+\frac{z+x-y}{z}\right) \geqslant \frac{1}{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}},$$

или $3-A \geqslant \dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}$, откуда

$$A \leqslant 3-\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}=2\left(1-\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Нетрудно показать, что $xy+xz+yz>\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, следовательно, $A<1$.

11.17. б) Имеем

$$\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_n}\frac{1}{a_2+\ldots+a_n}+$$

$$+\frac{a_2}{a_1+\ldots+a_n}\frac{1}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_n}\frac{1}{a_1+\ldots+a_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\dfrac{a_1(a_2+\ldots+a_n)+a_2(a_1+a_3+\ldots+a_n)+\ldots+a_n(a_1+\ldots+a_{n-1})}{a_1+\ldots+a_n}},$$

откуда

$$\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{(a_1+\ldots+a_n)^2-(a_1^2+\ldots+a_n^2)} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

поскольку $n(a_1^2+\ldots+a_n^2) \geqslant (a_1+\ldots+a_n)^2$.

11.18. Имеем

$$\frac{a}{a+b+c+d}\frac{1}{b+c}+\frac{b}{a+b+c+d}\frac{1}{c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}\frac{1}{d+a}+$$
$$+\frac{d}{a+b+c+d}\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{1}{\dfrac{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}{a+b+c+d}},$$

откуда

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+db}\geqslant 2,$$

поскольку

$$(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd)=$$
$$=(a-c)^2+(b-d)^2\geqslant 0.$$

11.19. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в области $(0,+\infty)$. Взяв $\alpha_1=\alpha_6=\dfrac{a}{2(a+b+c)}$, $\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{b}{2(a+b+c)}$, $\alpha_4=\alpha_5=$ $=\dfrac{c}{2(a+b+c)}$, $x_1=\dfrac{c}{a}$, $x_2=\dfrac{c}{b}$, $x_3=\dfrac{a}{b}$, $x_4=\dfrac{a}{c}$, $x_5=\dfrac{b}{c}$, $x_6=\dfrac{b}{a}$, получим

$$\frac{a}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{c}{a}}+\frac{b}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{c}{b}}+\frac{b}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{a}{b}}+\frac{c}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{a}{c}}+$$
$$+\frac{c}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{b}{c}}+\frac{a}{2(a+b+c)}\frac{1}{\frac{b}{a}}\geqslant\frac{1}{\dfrac{2c+2a+2b}{2(a+b+c)}}=1.$$

Второе неравенство получается аналогично:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{1}{2}\left(a^2\frac{1}{\frac{bc}{a}}+b^2\frac{1}{\frac{ac}{b}}\right)+\frac{1}{2}\left(a^2\frac{1}{\frac{bc}{a}}+c^2\frac{1}{\frac{ab}{c}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(c^2\frac{1}{\frac{ba}{c}}+b^2\frac{1}{\frac{ac}{b}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\frac{(a^2+b^2)^2}{2abc}+\frac{1}{2}\frac{(a^2+c^2)^2}{2abc}+\frac{1}{2}\frac{(c^2+b^2)^2}{2abc}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2c}\frac{a^2+b^2}{2ab}+\frac{a^2+c^2}{2b}\frac{a^2+c^2}{2ac}+\frac{b^2+c^2}{2a}\frac{b^2+c^2}{2bc}\geqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{a^2+c^2}{2b}+$$
$$+\frac{b^2+c^2}{2a}.$$

11.20. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в области $(0,+\infty)$. Взяв

$$\alpha_1=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},\quad \alpha_2=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\quad \alpha_3=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$x_1=\frac{a^2+ab+b^2}{a},\quad x_2=\frac{b^2+bc+c^2}{b},\quad x_3=\frac{c^2+ca+a^2}{c},$$

получим

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\frac{1}{\dfrac{a^2+ab+b^2}{a}}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\frac{1}{\dfrac{b^2+bc+c^2}{b}}+$$
$$+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\frac{1}{\dfrac{c^2+ac+a^2}{c}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\dfrac{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+a^2c}{a^2+b^2+c^2}},$$

или

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

11.21. Рассмотрим функцию $f(x)=-\ln x$ в области $(0,+\infty)$. Она выпуклая, следовательно,

$$-\ln\left(\frac{a}{a+b}\frac{c}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{d}{b}\right)\leqslant-\frac{a}{a+b}\ln\frac{c}{a}-\frac{b}{a+b}\ln\frac{d}{b},$$

или

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b}\leqslant\left(\frac{a}{c}\right)^{a}\left(\frac{b}{d}\right)^{b}.$$

З а м е ч а н и е. Если $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n>0$, то

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right)^{a_1+\ldots+a_n}\leqslant\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{a_n}.$$

11.22. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в области $(0,+\infty)$.

Взяв $\alpha_i=\dfrac{x_{i-1}}{x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, получим

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=$$
$$=\left(\frac{x_0}{x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}}\frac{1}{\dfrac{x_1}{x_0}}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}}\frac{1}{\dfrac{x_n}{x_{n-1}}}\right)\times$$
$$\times(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})\geqslant\frac{(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}=k_n.$$

Теперь докажем, что существует такое натуральное n_0, для которого при $n > n_0$ получим $k_n \geqslant 3{,}999$.

Действительно,

$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})^2 - 3{,}999\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) \geqslant \\ \geqslant 0{,}001\,(n-1)\,x_n - 3{,}999x_n \geqslant 0,$$

когда $n > \dfrac{3{,}999}{0{,}001} + 1$, т. е. можно принять, что $n_0 = 4000$.

11.23. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в области $(0, +\infty)$. Взяв $\alpha_1 = \dfrac{BC}{BC + AC + AB}$, $\alpha_2 = \dfrac{CA}{BC + AC + AB}$, $\alpha_3 = \dfrac{AB}{BC + AC + AB}$, $x_1 = MA_1$, $x_2 = MB_1$, $x_3 = MC_1$, получим

$$\frac{BC}{MA_1} + \frac{CA}{MB_1} + \frac{AB}{MC_1} = \left(\frac{BC}{BC + AC + AB}\frac{1}{MA_1} + \right. \\ \left. + \frac{CA}{BC + AC + AB}\frac{1}{MB_1} + \frac{AB}{BC + AC + AB}\frac{1}{MC_1}\right)(BC + AC + AB) \geqslant \\ \geqslant (BC + AC + AB)^2(BCMA_1 + ACMB_1 + ABMC_1) = \frac{4p^2}{2S} = \frac{2p^2}{S},$$

следовательно, наименьшее значение выражения $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{CA}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1}$ равно $\dfrac{2p^2}{S}$, и это значение достигается, когда $MA_1 = MB_1 = MC_1$.

11.24. Без ограничения общности можем считать, что $a_1 \geqslant \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Согласно упр. 14.10, а) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = b_1(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2)(a_2 - a_3) + \ldots \\ \ldots + (b_1 + \ldots + b_{n-1})(a_{n-1} - a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)a_n,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant a_1^m(a_1 - a_2) + (a_1 + a_2)^m(a_2 - a_3) + \ldots \\ \ldots + (a_1 + \ldots + a_{n-1})^m(a_{n-1} - a_n) + (a_1 + \ldots + a_n)^m a_n = A.$$

Поскольку функция $f(x) = x^m$ выпуклая в области $[0, +\infty)$, то

$$\frac{A}{a_1} = \frac{(a_1 - a_2)}{a_1}a_1^m + \frac{(a_2 - a_3)}{a_1}(a_1 + a_2)^m + \ldots \\ \ldots + \frac{(a_{n-1} - a_n)}{a_1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})^m + \frac{a_n}{a_1}(a_1 + \ldots + a_n)^m \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{a_1(a_1 - a_2)}{a_1} + \frac{(a_1 + a_2)(a_2 - a_3)}{a_1} + \ldots + \frac{(a_1 + \ldots + a_{n-1})(a_{n-1} - a_n)}{a_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(a_1 + \ldots + a_n)a_n}{a_1} \right)^m = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1} \right)^m.$$

Таким образом, получили, что

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \geqslant A^2 \geqslant \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{2m}}{a_1^{2m-2}} =$$

$$= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1^2} \right)^{m-1} (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{m+1} \geqslant$$

$$\geqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{m+1}.$$

Следовательно, $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \geqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{m+1}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$;

б) $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \geqslant 12$;

в) $\dfrac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \geqslant 2\sqrt{3}$;

г) $\dfrac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geqslant 6$.

2. Докажите, что если α, β, γ — углы некоторого остроугольного треугольника, то:

а) $\dfrac{\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} + \dfrac{\sqrt{1 + 8\cos^2\beta}}{\sin\beta} + \dfrac{\sqrt{1 + 8\cos^2\gamma}}{\sin\gamma} \geqslant 6$;

б) $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\beta} + \dfrac{1}{\cos\gamma} \geqslant 6$.

3. Докажите, что если для выпуклого четырехугольника $ABCD$ имеет место соотношение $\sin\dfrac{\angle A}{2} \sin\dfrac{\angle B}{2} \sin\dfrac{\angle C}{2} \sin\dfrac{\angle D}{2} = \dfrac{1}{4}$, то это прямоугольник.

4. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2},$$

где $x_i>0$, $i=1,\ldots,n$, $3\leqslant n\leqslant 6$.

5. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

6. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

7. Докажите неравенство $\dfrac{a_1}{1+xa_1}+\dfrac{a_2}{1+xa_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{1+xa_n}\leqslant\dfrac{n}{n+x}$, где $a_1,\ldots,a_n\geqslant 0$, $x>0$, $a_1+\ldots+a_n=1$.

8. Докажите неравенство

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\delta+\sin\delta\sin\alpha\leqslant 2,$$

где $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$.

9. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — любые действительные числа.

а) Докажите, что когда $\lambda\geqslant 2$ или $\lambda<0$, имеет место неравенство

$$\sum|\pm x_1\pm x_2\pm\ldots\pm x_n|^{\lambda}\geqslant 2^n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\lambda/2};$$

б) Докажите, что когда $0<\lambda<2$, имеет место неравенство

$$\sum|\pm x_1\pm x_2\pm\ldots\pm x_n|^{\lambda}\leqslant 2^n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\lambda/2}$$

(в левой части производится суммирование по всем комбинациям знаков $+$ и $-$).

10. Докажите неравенство

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2},$$

где $a\geqslant\dfrac{1}{2}$, $b\geqslant\dfrac{1}{2}$.

11. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^a\geqslant\frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}},$$

где $a,x_1,\ldots,x_n>0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$.

12. а) Докажите неравенство

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geqslant x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n},$$

где $a_1 + \ldots + a_n = 1$, $x_i > 0$, $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

б) Пусть $a_{ij} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \ldots \\ \ldots (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) \geqslant x_1x_2 \ldots x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

в) Докажите неравенство

$$(ux + vy + wz)(vx + wy + uz)(wx + uy + vz) \geqslant \\ \geqslant (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z),$$

где $u + v + w = 1$, $u, v, w, x, y, z \geqslant 0$.

13. Докажите, что

$$\left(\frac{(1-x)(1-y)}{z}\right)^{(1-x)(1-y)/z} \left(\frac{(1-y)(1-z)}{x}\right)^{(1-y)(1-z)/x} \times \\ \times \left(\frac{(1-z)(1-x)}{y}\right)^{(1-z)(1-x)/y} \geqslant \frac{256}{81},$$

где $x, y, z > 0$ и $x + y + z = 1$.

14. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{a+c}$, где $a, b, c > 0$;

б) $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{x_j}{x_j + x_{j+1}} - \dfrac{x_1}{x_1 + x_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \geqslant 3$.

§ 12. НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

В данном параграфе будут рассмотрены неравенства, связанные с последовательностями (в частности, заданными рекуррентными соотношениями), которые доказываются различными способами.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Докажите, что если $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}$ и $0 < x_1 < 1$, то последовательность (x_n) ограниченна.

12.2. Докажите, что если $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$ $\ldots, 10$, то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}$.

12.3. В последовательности (u_n) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что $14{,}2 < u_{100} < 14{,}22$.

12.4. В последовательности $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что $30 < u_{9000} < 30{,}01$.

12.5. Докажите, что если $u_0 = 0{,}001$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ $(n \geqslant 0)$, то $u_{1000} < \dfrac{1}{2000}$.

12.6. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \dfrac{1}{a_n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что эта последовательность неограниченна.

12.7. Известно, что $a_0 = a_n = 0$ и $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $\dfrac{a_{s-1} + a_{s+1}}{2} > a_s \cos\left(\dfrac{\pi}{k}\right)$, $n, k \in \mathrm{N}$, $n \geqslant 2$.

Докажите, что $n \geqslant k$.

12.8. Пусть $x_1 \in [0, 1)$ и $x_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n = 0, \\ \dfrac{1}{x_n} - \left[\dfrac{1}{x_n}\right], & \text{если } x_n \neq 0 \end{cases}$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Докажите, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

где $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

12.9. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Найдите наименьшее значение суммы $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, если $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, причем $a_0 = 1$ и $a_i \leqslant a_{i+1} + a_{i+2}$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$.

12.10. Дана последовательность положительных чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Докажите, что $2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x_n < 2 - \frac{1}{2^n}$.

12.11. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что неравенство $1 + a_n >$ $> \sqrt[n]{2{,}7}a_{n-1}$ верно для бесконечного числа n.

12.12. Дана последовательность $a_n = \max\limits_{[0;1]}(x^n(1-x) + (1-x)^n x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $a_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}a_n$, $n = 1, 2, \ldots$

РЕШЕНИЯ

12.1. Методом математической индукции докажем, что

$$x_n \leqslant \frac{nx_1}{(1-\sqrt{x_1})n + \sqrt{x_1}}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

В случае $n = 1$ имеем справедливое неравенство

$$x_1 \leqslant \frac{x_1}{(1-\sqrt{x_1}) + \sqrt{x_1}} = x_1.$$

Пусть данное неравенство справедливо в случае $n = k$, т. е. $x_k \leqslant$ $\leqslant \frac{kx_1}{(1-\sqrt{x_1})k + \sqrt{x_1}}$. Тогда докажем, что оно справедливо также в случае $n = k+1$, т. е. $x_{k+1} \leqslant \frac{(k+1)x_1}{(1-\sqrt{x_1})(k+1) + \sqrt{x_1}}$.

Так как $x_{k+1} = x_k + \frac{x_k^2}{k^2}$ и $x_k \leqslant \frac{kx_1}{(1-\sqrt{x_1})k + \sqrt{x_1}}$, то

$$x_{k+1} \leqslant \frac{kx_1}{k(1-\sqrt{x_1}) + \sqrt{x_1}} + \frac{x_1^2}{(k(1-\sqrt{x_1}) + \sqrt{x_1})^2} =$$

$$= x_1 \frac{k^2(1-\sqrt{x_1}) + k\sqrt{x_1} + x_1}{(k(1-\sqrt{x_1}) + \sqrt{x_1})^2} \leqslant \frac{(k+1)x_1}{(1-\sqrt{x_1})(k+1) + \sqrt{x_1}},$$

поскольку

$$\frac{k+1}{k(1-\sqrt{x_1})+1} - \frac{k^2(1-\sqrt{x_1}) + k\sqrt{x_1} + x_1}{k^2(1-\sqrt{x_1})^2 + 2k(1-\sqrt{x_1})\sqrt{x_1} + x_1} =$$
$$= \frac{\sqrt{x_1}(1-\sqrt{x_1})^2}{(k(1-\sqrt{x_1})+1)(k^2(1-\sqrt{x_1})^2 + 2k(1-\sqrt{x_1})\sqrt{x_1} + x_1)} > 0.$$

Таким образом, оба требования индукции выполняются, следовательно, для любого натурального значения n справедливо неравенство

$$0 < x_n \leqslant \frac{nx_1}{(1-\sqrt{x_1})n + \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{nx_1}{n(1-\sqrt{x_1})} = \frac{x_1}{1-\sqrt{x_1}},$$

т. е. последовательность (x_n) ограниченна.

12.2. Докажем, что $a_n - \sqrt{2} > 0$, где $n = 2, 3, \ldots$

Имеем $a_n = 0{,}5\Big(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\Big) \geqslant \sqrt{a_{n-1}\dfrac{2}{a_{n-1}}} = \sqrt{2}$, откуда $a_n - \sqrt{2} \geqslant 0$. Равенство не имеет места, так как все члены последовательности — рациональные числа, следовательно, $a_n - \sqrt{2} > 0$.

Теперь рассмотрим последовательность $b_n = a_n - \sqrt{2}$. Имеем

$$b_n = a_n - \sqrt{2} = 0{,}5\Big(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\Big) - \sqrt{2} = \frac{a_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}a_{n-1} + 2}{2a_{n-1}} =$$
$$= \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}} = \frac{b_{n-1}^2}{2a_{n-1}}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

откуда $b_n < \dfrac{b_{n-1}^2}{2\sqrt{2}}$.

Поскольку $b_2 = a_2 - \sqrt{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{10}$ и $b_n < \dfrac{b_{n-1}^2}{2\sqrt{2}}$, то

$$b_3 < \frac{b_2^2}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{10^2 2\sqrt{2}}, \qquad b_4 < \frac{1}{10^4(2\sqrt{2})^2 2\sqrt{2}},$$

и, продолжая таким образом, получим, что

$$b_{10} < \frac{1}{10^{2^8}} \frac{1}{(2\sqrt{2})^{2^7}} \frac{1}{(2\sqrt{2})^{2^6}} \cdots \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{256}} \frac{1}{(2\sqrt{2})^{255}}.$$

Теперь докажем, что $\dfrac{1}{10^{256}} \dfrac{1}{(2\sqrt{2})^{255}} < \dfrac{1}{10^{370}}$, или $10^{114} < (2\sqrt{2})^{255} = 2^{382}\sqrt{2}$. Так как $2^{10} > 10^3$, то $10^{114} < 2^{380} < 2^{382}\sqrt{2}$.

Таким образом, $b_{10} < \dfrac{1}{10^{256}} \dfrac{1}{(2\sqrt{2})^{255}} < \dfrac{1}{10^{370}}$, откуда и получаем $a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}$.

12.3 Из условия упражнения имеем, что $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. То есть

$$u_2^2 = u_1^2 + 2 + \frac{1}{u_1^2},$$
$$u_3^2 = u_2^2 + 2 + \frac{1}{u_2^2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$u_n^2 = 2n + \frac{1}{u_2^2} + \frac{1}{u_3^2} + \ldots + \frac{1}{u_{n-1}^2}, \qquad n \geqslant 3. \tag{12.11}$$

Так как $u_{n-1} > u_{n-2} > \ldots > u_2 = 2$, то $\dfrac{1}{u_2^2} + \dfrac{1}{u_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n-1}^2} < \dfrac{n}{4}$. Следовательно,

$$2n \leqslant u_n^2 < \frac{9}{4}n \quad (n \geqslant 2). \tag{12.12}$$

Из условий (12.11) и (12.12) следует, что в случае $n = 100$ имеем

$$200 + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99}\right) < u_{100}^2 < 200 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99}\right).$$

Оценим сумму $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{99}$ снизу и сверху:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{33}\right) + \left(\frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{99}\right) >$$
$$> 1{,}675 + 0{,}346 + \ln\frac{34}{12} + \ln\frac{100}{34} > 4{,}021,$$

так как $\ln\dfrac{34}{12} > 1$ и $\ln\dfrac{100}{34} > 1$;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{33}\right) + \left(\frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{99}\right) <$$
$$< 1{,}675 + 0{,}347 + \ln\frac{33}{11} + \ln\frac{99}{33} = 2{,}022 + 2\ln 3 < 4{,}222,$$

так как $\ln 3 < 1{,}1$, следовательно, $201{,}787 < u_{100}^2 < 202{,}111$, откуда
$$14{,}2 < u_{100} < 14{,}22.$$

В процессе доказательства мы воспользовались неравенствами
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{m} > \ln \frac{m+1}{k}$$
и
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{m} < \ln \frac{m}{k-1}.$$

Докажем их:
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{m} = \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{k}\,dx + \int\limits_{k+1}^{k+2} \frac{1}{k+1}\,dx + \ldots + \int\limits_{m}^{m+1} \frac{1}{m}\,dx >$$
$$> \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}\,dx + \ldots + \int\limits_{m}^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{k}^{m+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{m+1}{k}$$
и
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{m} = \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{k}\,dx + \int\limits_{k+1}^{k+2} \frac{1}{k+1}\,dx + \ldots + \int\limits_{m}^{m+1} \frac{1}{m}\,dx <$$
$$< \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx + \ldots + \int\limits_{m-1}^{m} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{k-1}^{m} \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{m}{k-1}.$$

12.4 Имеем, что $u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}$, где $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом,
$$u_2^3 = u_1^3 + 3 + \frac{3}{u_1^3} + \frac{1}{u_1^6},$$
$$u_{32}^3 = u_2^3 + 3 + \frac{3}{u_2^3} + \frac{1}{u_2^6},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}.$$

Складывая полученные равенства, получим
$$u_{n+1}^3 = 3n + 3\left(\frac{1}{u_1^3} + \ldots + \frac{1}{u_n^3}\right) + \left(\frac{1}{u_1^6} + \ldots + \frac{1}{u_n^6}\right),$$
следовательно, $u_{n+1}^3 > 3n + \frac{3}{u_1^3} = 3(n+1)$ или $u_{n+1} > \sqrt[3]{3(n+1)}$, откуда и получаем $u_{9000} > \sqrt[3]{3 \cdot 9000} = 30$.

С другой стороны,

$$u_{n+1}^3 = 3n + 3\Big(\frac{1}{u_1^3} + \ldots + \frac{1}{u_n^3}\Big) + \Big(\frac{1}{u_1^6} + \ldots + \frac{1}{u_n^6}\Big) <$$
$$< 3(n+1) + 1 + 3\Big(\frac{1}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{3\cdot n}\Big) + \Big(\frac{1}{3^2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{3^2\cdot n^2}\Big) =$$
$$= 3(n+1) + 1 + \Big(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{9}\Big(\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\Big).$$

Поскольку $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n$ (см. решение упр. 12.3) и

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

то $u_{n+1}^3 < 3(n+1) + 1 + \ln n + \frac{1}{9}$, следовательно,

$$u_{9000}^3 < 2702 + \ln 9000 < 2702 + \ln 2^{25} < 2727 < \Big(30 + \frac{1}{100}\Big)^3.$$

Таким образом, $u_{9000} < 30{,}01$.

12.5. Так как $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, то

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1-u_n}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{1-u_0}, \quad \frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{1-u_1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{u_{1000}} = \frac{1}{u_{999}} + \frac{1}{1-u_{999}}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{1}{u_{1000}} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{1-u_0} + \ldots + \frac{1}{1-u_{999}} = 10^3 + \frac{1}{1-u_0} + \ldots + \frac{1}{1-u_{999}} >$$
$$> 10^3 + 1 + \ldots + 1 = 2000,$$

откуда $u_{1000} < \frac{1}{2000}$.

В данном случае мы воспользовались неравенствами $0 < u_n < 1$, которые можно доказать следующим образом:

$$u_{n+1} = u_n(1-u_n) \leqslant \Big(\frac{u_n + (1-u_n)}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} < 1, \qquad n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$$

Если $u_n \leqslant 0$, то из равенства $u_n = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$ получится, что $u_{n-1} \leqslant 0$. Продолжая таким образом, получим $u_0 \leqslant 0$, которое не справедливо, следовательно, $u_n > 0$.

12.6. Предположим, что последовательность (a_n) ограниченна, т. е. $m < a_n < M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где $M > 0$, так как $a_n > 0$.

Из условия задачи следует, что $a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n = \dfrac{1}{a_n}$, или $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_n^2 a_{n+1}^2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2}, \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2^2 a_3^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n^2 a_{n+1}^2}.$$

Складывая полученные равенства, получим

$$1 = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_2^2 a_3^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2 a_{n+1}^2} > \underbrace{\frac{1}{M^4} + \frac{1}{M^4} + \ldots + \frac{1}{M^4}}_{n} = \frac{n}{M^4},$$

или $M^4 > n$, что неверно, следовательно, последовательность (a_n) неограниченна.

12.7. Предположим, что $n < k$. В этом случае $\dfrac{\pi}{k} < \dfrac{\pi}{n}$, следовательно, $\cos\dfrac{\pi}{k} > \cos\dfrac{\pi}{n}$. Отсюда получается

$$a_2 > 2a_1 \cos\frac{\pi}{n}, \quad a_1 + a_3 > 2a_2 \cos\frac{\pi}{n}, \quad \ldots, \quad a_{n-2} > 2a_{n-1} \cos\frac{\pi}{n}.$$

Обе части первого неравенства умножим на $\sin\dfrac{\pi}{n}$, второго — на $\sin\dfrac{2\pi}{n}$ и т. д., последнего — на $\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$. Складывая все полученные неравенства, получим неверное неравенство $0 > 0$. Следовательно, наше предположение неверно. Поэтому $n \geqslant k$.

12.8. Без нарушения общности можем считать, что $x_n \neq 0$.

Имеем $x_k = \left\{\dfrac{1}{x_{k-1}}\right\}$, $k = 2, \ldots, n$, следовательно, $x_k \in (0, 1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$x_k = \frac{1}{x_{k+1} + \left[\dfrac{1}{x_k}\right]} \leqslant \frac{1}{x_{k+1} + 1} = f(x_{k+1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (*)$$

где $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Л е м м а. *Если функция $f(x)$ в области I убывает, а функция $x + f(x)$ возрастает, то функция $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) + \ldots$ $\ldots + \underbrace{f(f(\ldots f}_{m}(x)\ldots))$ в области I возрастает, где $m \in \mathrm{N}$.*

Действительно, заметим, что функция $\underbrace{f(f(\ldots f}_{2k}(x)\ldots))$, $k \in \mathrm{N}$, в области I будет возрастать; следовательно, функция

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2k}(x)\ldots)) + \underbrace{f(f(\ldots f}_{2k+1}(x)\ldots))$$

в области I также возрастает, а функция $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) + \ldots$ будет суммой возрастающих функций, т. е. она в области I возрастает.

Нетрудно проверить, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ в области $I = [0,1]$ удовлетворяет условиям леммы. Таким образом, согласно лемме и $(*)$ имеем

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant f(x_2) + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leqslant \\
&\qquad \leqslant x_3 + f(x_3) + f(f(x_3)) + x_4 + \ldots + x_n \leqslant \ldots \\
&\qquad \ldots \leqslant x_n + f(x_n) + f(f(x_n)) + \ldots + \underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1}(x_n)\ldots)) \leqslant \\
&\qquad \leqslant 1 + f(1) + \underbrace{f(f(\ldots f}_{n-1}(1)\ldots)) = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}},
\end{aligned}$$

поскольку $1 = \dfrac{F_1}{F_2}$ и $f\left(\dfrac{F_i}{F_{i+1}}\right) = \dfrac{F_{i+1}}{F_{i+2}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

12.9. Методом математической индукции докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* $n \geqslant 2$, $c_0 = 0$, $c_n \geqslant 0$ *и* $c_i \leqslant c_{i+1} + c_{i+2}$, $i = 1,2,\ldots,n-2$, *то* $c_0 + c_1 + \ldots + c_n \geqslant 0$.

Действительно, при $n = 2$ и $n = 3$ имеем $c_0 + c_1 + c_2 \geqslant 2c_0 = 0$ и $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \geqslant 2c_0 + c_3 \geqslant 0$.

Пусть в случае $n \leqslant k$ утверждение леммы верно. Докажем, что оно верно также в случае $n = k+1$ $(k \geqslant 3)$.

Рассмотрим два случая.

а) $c_1 \geqslant 0$; так как $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 + c_3$, то для чисел $0, c_2, c_3, \ldots, c_{k+1}$ выполняются условия леммы, следовательно, $0 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{k+1} \geqslant 0$, откуда $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k+1} \geqslant c_2 + c_3 + \ldots + c_{k+1} \geqslant 0$.

б) $c_1 < 0$; имеем $c_2 \geqslant -c_1 > 0$, для чисел $0, c_3, c_4, \ldots, c_{k+1}$ выполняются условия леммы, следовательно, $0 + c_3 + c_4 + \ldots + c_{k+1} \geqslant 0$, с другой стороны,

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{k+1} \geqslant 2c_0 + c_3 + \ldots + c_{k+1} \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Заметим, что числа $c_i = a_i - \dfrac{F_{n-i}}{F_n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, $c_0 + c_1 + \ldots + c_n \geqslant 0$, или $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \geqslant \dfrac{F_n}{F_n} + \dfrac{F_{n-1}}{F_n} + \ldots + \dfrac{F_0}{F_n}$; с другой стороны, числа $a_i = \dfrac{F_{n-i}}{F_n}$ удовлетворяют условиям задачи, поэтому наименьшее значение суммы $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ будет равно $\dfrac{F_n + F_{n-1} + \ldots + F_0}{F_n}$. Методом математической индукции нетрудно доказать, что $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

12.10. Заметим, что $x_1 = 1$ и $x_n > 1$ при $n = 2, 3, \ldots$ Следовательно, при $n > 1$ имеем $x_n^n = \dfrac{x_n^n - 1}{x_n - 1}$, или $x_n^n(2 - x_n) = 1$.

Пусть $x_n = 2 - y_n$, тогда $0 < y_n < 1$ при $n = 2, 3, \ldots$ и $y_n(2 - y_n)^n = 1$. Нужно доказать, что $\dfrac{1}{2^n} < y_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Имеем $y_n = \dfrac{1}{(2-y_n)^n} > \dfrac{1}{2^n}$ (при $n = 2, 3, \ldots$). Согласно неравенству Бернулли имеем

$$1 = y_n(2 - y_n)^n = y_n(1 + (1 - y_n))^n \geqslant y_n(1 + n(1 - y_n)),$$

следовательно, $y_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, поэтому

$$y_n = \frac{1}{2^n\left(1 - \frac{y_n}{2}\right)^n} \leqslant \frac{1}{2^n\left(1 - \frac{ny_n}{2}\right)} \frac{1}{2^{n-1}}$$

при $n = 2, 3, \ldots$

12.11. Докажем от противного: предположим, что неравенство $1 + a_n > \sqrt[n]{2{,}7}\, a_{n-1}$ верно для конечного числа n. Следовательно, существует натуральное число n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$ $1 + a_n \leqslant \sqrt[n]{2{,}7}\, a_{n-1}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, существует натуральное число n_1 такое, что при $n \geqslant n_1$ $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 2{,}7$ $(e = 2{,}718281828\ldots)$. Следовательно, для $n \geqslant m$, где $m = \max(n_0, n_1)$, имеем $1 + a_n \leqslant a_{n-1}\sqrt[n]{2{,}7} < \dfrac{n+1}{n} a_{n-1}$, поэтому $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1} < \dfrac{a_{n-1}}{n}$. Таким образом,

$$\frac{1}{m+1} < \frac{a_{m-1}}{m} - \frac{a_m}{m+1}, \quad \frac{1}{m+2} < \frac{a_m}{m+1} - \frac{a_{m+1}}{m+2}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{1}{m+k} < \frac{a_{m+k-2}}{m+k-1} - \frac{a_{m+k-1}}{m+k}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+k}<\frac{a_{m-1}}{m}-\frac{a_{m+k-1}}{m+k}<\frac{a_{m-1}}{m},$$

следовательно, $\dfrac{1}{m+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{a_{m-1}}{m}$, т. е. последовательность чисел $x_k=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{k}$ ограниченна, что неверно, так как $x_{2n}-x_n\geqslant\dfrac{1}{2}$, где $n\in\mathrm{N}$. Действительно, $x_{2n}=x_n+\dfrac{1}{n+1}+\ldots$ $\ldots+\dfrac{1}{2n}\geqslant x_n+n\cdot\dfrac{1}{2n}=x_n+\dfrac{1}{2}$.

12.12. Докажем методом математической индукции. Имеем $a_1=$ $=\dfrac{1}{2}$, $a_2=\dfrac{1}{4}$, поэтому $a_2\geqslant\dfrac{1}{2}\,a_1$.

Пусть $a_{m+1}\geqslant\dfrac{1}{2}\,a_m$, где $m\in\mathrm{N}$, докажем, что $a_{m+2}\geqslant\dfrac{1}{2}\,a_{m+1}$.

Пусть $x_0\in[0,1]$ такое, что $a_{m+1}=x_0^{m+1}(1-x_0)+x_0(1-x_0)^{m+1}$; тогда

$$\begin{aligned}a_{m+2}\geqslant x_0^{m+2}(1-x_0)+x_0(1-x_0)^{m+2}&=\\=\left(x_0^{m+1}(1-x_0)+x_0(1-x_0)^{m+1}\right)&(x_0+(1-x_0))-\\-x_0(1-x_0)\left(x_0^{m}(1-x_0)+x_0(1-x_0)^{m}\right)&\geqslant a_{m+1}-x_0(1-x_0)\,a_m=\\=\frac{a_{m+1}}{2}+\frac{a_{m+1}}{2}-x_0(1-x_0)\,a_m&\geqslant\frac{a_{m+1}}{2}+\frac{a_m}{4}-x_0(1-x_0)\,a_m=\\&=\frac{a_{m+1}}{2}+a_m\left(\frac{1}{2}-x_0\right)^2\geqslant\frac{a_{m+1}}{2},\end{aligned}$$

следовательно, $a_{m+2}\geqslant\dfrac{1}{2}\,a_{m+1}$.

Значит, $a_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{2}a_n$, $n=1,2,\ldots$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В последовательности (u_n) $u_1=10^9$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2}{2u_n}$ $(n\geqslant 1)$. Докажите, что $0<u_{36}-\sqrt{2}<10^{-13}$.

2. Пусть даны действительные числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$a_1=0,\quad |a_2|=|a_1+1|,\quad |a_3|=|a_2+1|,\quad \ldots,\quad |a_n|=|a_{n-1}+1|.$$

Докажите, что $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

3. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ получена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Верно ли, что эта последовательность ограниченна?

4. Последовательность (a_n) неубывающая и $a_0 = 0$. Известно также, что последовательность $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ не возрастает. Докажите, что последовательность $c_n = \dfrac{a_n}{n}$ $(n \geqslant 1)$ также не возрастает.

5. Последовательность (x_n) задана рекуррентным соотношением $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{10x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $\dfrac{4}{5} < x_n \leqslant \dfrac{5}{4}$ для всех $n > 1$.

6. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \dfrac{1}{a_n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Докажите, что $a_{250} < 10$.

7. Дана последовательность $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} < 1$.

8. Даны последовательности (a_n) и (b_n): $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$, $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что последовательность (b_n) ограниченна.

9. Известно, что $R_1 = 1$, $R_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{R_n}$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что $\sqrt{n} \leqslant R_n \leqslant \sqrt{n} + 1$.

10. Известно, что $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n^2}{n}$. Докажите, что существует число A такое, что $0 < n(A - a_n) < A^3$.

11. Дана последовательность $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $a_0 = 2$. Докажите, что $12 < a_{70} < 12{,}25$.

12. Даны последовательности (a_n) $(a_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots)$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} + a_n x_{n+1} + x_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что последовательность (x_n) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

13. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$ Докажите, что $\sqrt{2n-1} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{3n-2}$.

14. Дана последовательность $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{10x_n}$. Докажите, что $1 - 10^{-10} < x_{100} \leqslant 1 + 10^{-10}$.

15. а) Дана последовательность $a_1 \geqslant 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Докажите, что $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} < \dfrac{a_1}{2} - \sqrt{\dfrac{a_1^2}{4} - 1}$.

б) Пусть $a > 2$ и $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_{n+1} = \left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right) a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_k} < \dfrac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\right)$.

16. При каких значениях x_1 все члены последовательности $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будут отрицательными.

17. Дана последовательность $x_n = \sum\limits_{i=2}^{n+1} \dfrac{1}{i}$. Докажите, что $x_{n^k - 1} > kx_{n-1}$, где $n, k \in \mathrm{N}$ и $n > 1$, $k > 1$.

18. Дана последовательность

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)^2 + 1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Докажите, что $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} < 2{,}5$.

19. Дана последовательность $u_1 = 1$, $u_n = n! + \dfrac{n-1}{n} u_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ Докажите, что $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n} < 1$.

20. Дана монотонная последовательность (x_n) положительных чисел. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n + \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_1 x_2} + \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_2 x_3} + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_{n-1} x_n},$$

где $n \geqslant 2$.

У к а з а н и е. Пусть $\dfrac{x_2}{x_1} = 1 + \alpha_1, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = 1 + \alpha_{n-1}$; тогда

$$\frac{x_n}{x_1} = (1 + \alpha_1) \ldots (1 + \alpha_{n-1}).$$

§ 13. НЕРАВЕНСТВА ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 13.1–13.3.

13.1. $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{4n^2}\right)$, где $\dfrac{m}{n} < \sqrt{2}$, $m, n \in \mathrm{N}$.

13.2. $(n\sqrt{d} + 1)\,|\sin(\pi\sqrt{d}\,n)| \geqslant 1$, где $n, d \in \mathrm{N}$ и $\sqrt{d} \notin \mathrm{N}$.

13.3. $S \leqslant pq - \dfrac{q(p-1)}{q-p}$, где $S, p, q \in \mathrm{N}$; S делится на q, а при делении на p дает остаток 1 и $q > p$, $S < pq$.

13.4. Пусть $m, k \in \mathrm{N}$ и известно, что все простые делители числа m не превышают n и $m \leqslant n^{(k+1)/2}$. Докажите, что число m можно представить в виде произведения k натуральных чисел, каждое из которых не превышает n.

13.5. Пусть $n \in \mathrm{N}$ и $\sigma(n)$ — сумма всех делителей числа n (пример: $\sigma(3) = 4$, $\sigma(6) = 12$, $\sigma(12) = 28$). Докажите, что если $\sigma(a) > 2a$ и $b \in \mathrm{N}$, то $\sigma(ab) > 2ab$.

13.6. Найдите все те числа α, для которых имеет место следующее условие: для любого натурального числа n существует целое число m такое, что $\left|\alpha - \dfrac{m}{n}\right| < \dfrac{1}{3n}$.

13.7. Будем говорить, что число интересное, если оно является произведением двух простых чисел. Какое наибольшее число последовательных чисел могут быть интересными?

13.8. Докажите, что существует бесконечное число натуральных значений n, для которых $S(2^n) > S(2^{n+1})$, где $S(a)$ — сумма цифр натурального числа a.

13.9. Пусть натуральное число n представлено в виде суммы натуральных чисел. Обозначим число всех таких представлений через $P(n)$ (например, $P(4) = 5$, $4 = 4$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$). Докажите, что $P(n+1) + P(n-1) \geqslant 2P(n)$, $n = 2, 3, \ldots$

13.10. Пусть натуральное число a разделили «уголком» на натуральное числа b и получили число $c_0{,}c_1c_2c_3\ldots$ Известно, что $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = c_{n+k} = 9$ для некоторого $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $k \in \mathrm{N}$.

Докажите, что: а) $k \leqslant \left[\frac{b}{10}\right]$; б) $k \leqslant [\lg b]$.

13.11. Для каждого натурального числа n найдите наибольшее число $f(n)$ такое, чтобы можно было из чисел $1, 2, \ldots, n$ выбрать $f(n)$ чисел таких, что отношение любых двух из них не равно 2.

13.12. Докажите, что натуральное число n можно представить в виде суммы квадратов m натуральных чисел, где $3[\log_4 n] + 5 \leqslant$ $\leqslant m \leqslant n - 14$.

РЕШЕНИЯ

13.1. Имеем неравенство

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}\,n - m}{n} = \frac{2n^2 - m^2}{n(\sqrt{2}\,n + m)} \geqslant \frac{1}{n(\sqrt{2}\,n + m)},$$

так как $2n^2 - m^2$ — положительное целое число. С другой стороны, $m < \sqrt{2}\,n$, следовательно,

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} \geqslant \frac{1}{n(\sqrt{2}\,n + m)} > \frac{1}{n(\sqrt{2}\,n + \sqrt{2}\,n)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,n^2}.$$

Таким образом, получили неравенство $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}\,n^2}$, или $\frac{m}{n} <$ $< \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

13.2. Пусть $[\sqrt{d}\,n] = k$, следовательно, $k < \sqrt{d}\,n < k + 1$. Рассмотрим два случая:

а) $k < \sqrt{d}\,n < k + \frac{1}{2}$, в этом случае

$$(n\sqrt{d} + 1)|\sin \pi \sqrt{d}\,n| = (n\sqrt{d} + 1)|\sin \pi(\sqrt{d}\,n - k)| \geqslant$$
$$\geqslant (n\sqrt{d} + 1)2(\sqrt{d}\,n - k) = (2n\sqrt{d} + 2)\frac{dn^2 - k^2}{\sqrt{d}\,n + k} \geqslant \frac{2n\sqrt{d} + 2}{\sqrt{d}\,n + k} > 1.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}\,x$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (его можно доказать с помощью производных).

б) $k + \frac{1}{2} < \sqrt{d}\,n < k + 1$, в этом случае

$$(n\sqrt{d} + 1)|\sin \pi(k + 1 - \sqrt{d}\,n)| \geqslant \frac{2n\sqrt{d} + 2}{k + 1 + \sqrt{d}\,n} > 1.$$

13.3. Согласно условию задачи S можно представить в следующем виде: $S = p(q - i) + 1 = pq - (pi - 1) = pq - qj$, где $i, j \in \mathrm{N}$.

Имеем $pi-1=qj$ и $q>p$, следовательно, $i>j$, где $i\geqslant j+1$ и $qj\geqslant p(j+1)-1$, или $(q-p)j\geqslant p-1$. Отсюда получим $S=pq-qj\leqslant pq-\dfrac{q(p-1)}{q-p}$.

13.4. Рассмотрим все возможные представления $m=a_1a_2\ldots a_k$, где $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_k$ и $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\mathrm{N}$. Ясно, что их число конечно. Пусть $m=a_1a_2\ldots a_k$ — то представление из этих представлений, при котором a_k наименьшее.

Если $a_k\leqslant n$, то задача решена. Предположим, что $a_k>n$, тогда a_k не простое число, поскольку $m\,\vdots\,a_k$. Пусть p — наименьший простой делитель a_k, в этом случае $p\leqslant\sqrt{a_k}$.

Имеем $m=(pa_1)\,a_2\ldots a_{k-1}\left(\dfrac{a_k}{p}\right)$, поэтому $pa_1\geqslant a_k$, где $a_1\geqslant\sqrt{a_k}>\sqrt{n}$.

Таким образом, $m=a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k>\left(\sqrt{n}\right)^{k-1}n=n^{(k+1)/2}$, что невозможно.

13.5. Пусть числа $1=a_1<a_2<\ldots<a_k=a$ — все делители числа a, в этом случае числа $ba_1<ba_2<\ldots<ba_k$ будут делителями ab, следовательно, $\sigma(ab)\geqslant ba_1+ba_2+\ldots+ba_k=b\sigma(a)>2ab$.

13.6. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha\in[0,1)$, поскольку $\left|\alpha-\dfrac{m}{n}\right|=\left|\{\alpha\}-\dfrac{m-[\alpha]n}{n}\right|$.

Заметим, что $\alpha=0$ удовлетворяет задачи условию, достаточно взять $m=0$. Докажем, что если $0<\alpha<1$, то существует натуральное число n такое, что для любого целого числа m имеем $\left|\alpha-\dfrac{m}{n}\right|\geqslant\dfrac{1}{3n}$.

Если $\alpha\in Q$, то $\alpha=\dfrac{p}{q}$, где $0<p<q$, $p,q\in Z$. Предположим, что α удовлетворяет условию задачи. Если $n=q,q+1,\ldots,2q$, то числа $\alpha q=p,\alpha(q+1),\ldots,\alpha 2q=2p$ должны принадлежать объединению областей

$$\left(p-\frac{1}{3};\ p+\frac{1}{3}\right),\quad\left(p+1-\frac{1}{3};\ p+1+\frac{1}{3}\right),\quad\ldots,\quad\left(2p-\frac{1}{3};\ 2p+\frac{1}{3}\right).$$

Так как количество этих чисел равно $q+1$, а число областей равно $p+1$, то согласно принципу Дирихле существуют такие $i,j\in\{q,q+1,\ldots,2q\}$, $i\neq j$, что числа α_i,α_j принадлежат одной области, откуда получаем $\alpha<\dfrac{2}{3}$. С другой стороны, существует такое $l\in\{q,q+1,\ldots,2q\}$, что числа αl и $\alpha(l+1)$ принадлежат различным областям, следовательно, $\alpha>\dfrac{1}{3}$. Таким образом, если $\dfrac{1}{3}<\alpha<\dfrac{2}{3}$, то в таком случае при $n=1$ не существует целого

числа m такого, что $|\alpha - m| < \frac{1}{3}$. Последнее противоречит нашему предположению.

Если α — иррациональное число, то существует $n_0 \in \mathrm{N}$ такое, что $l + \frac{2}{5} < \alpha n_0 < l + \frac{3}{5}$, где $l \in Z$ (см. упр. 14.25).

Предположим, что $m_0 \in Z$ и $\left|\alpha - \frac{m_0}{n_0}\right| < \frac{1}{3}$.

Если $l \neq m_0$, то

$$|\alpha n_0 - m_0| = |\alpha n_0 - l + l - m_0| \geqslant |l - m_0| - |\alpha n_0 - l| > 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} > \frac{1}{3}.$$

Если же $l = m_0$, то $|\alpha n_0 - m_0| = |\alpha n_0 - l| > \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют только целые числа.

Второе решение. Пусть $n \in \mathrm{N}$, $k, m \in Z$ и $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{3n}$ и $\left|\alpha - \frac{k}{2n}\right| < \frac{1}{6n}$. Если $k \neq 2m$, то $|k - 2m| \geqslant 1$, следовательно,

$$\frac{1}{2n} \leqslant \left|\frac{m}{n} - \frac{k}{2n}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{k}{2n}\right| + \left|\frac{m}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{2n},$$

что невозможно. Пусть $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $\left|\alpha - \frac{m_k}{2^k}\right| < \frac{1}{3 \cdot 2^k}$ и $m_k \in Z$; тогда $m_0 = \frac{m_1}{2} = \ldots = \frac{m_k}{2^k} = \ldots$; следовательно, $|\alpha - m_0| < \frac{1}{3 \cdot 2^k}$, значит, $\alpha = m_0 \in Z$.

Если $\alpha \in Z$, то очевидно, что при $m = \alpha n$ имеем, что $m \in Z$ и $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| = 0 < \frac{1}{3n}$.

13.7. Приведем пример трех последовательных интересных чисел:

$$33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Докажем, что не существует четырех последовательных интересных чисел. Если таковые существуют, то одно из этих чисел будет делиться на 4, поэтому оно будет равно 4. В таком случае одно из чисел будет равно 5 или 3, которые не интересные.

13.8. Предположим, что существует конечное число натуральных n, для которых $S(2^n) > S(2^{n+1})$. Следовательно, существует число n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in \mathrm{N}$

$$S(2^n) \leqslant S(2^{n+1}). \tag{13.1}$$

Заметим, что $S(2^n) \neq S(2^{n+1})$, поскольку в противном случае $2^n = 2^{n+1} - 2^n \,\vdots\, 9$, что невозможно.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $n \geqslant n_0$, *то* $S(2^{n+6}) \geqslant S(2^n) + 27$.

Действительно, при делении чисел $2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, \ldots, 2^{n+6}$ на 9 получаются такие остатки, каковыми являются семь последовательных членов периодической последовательности 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, ... Из сказанного и (13.1) ясно, что

$$S\left(2^{n+6}\right) - S\left(2^{n}\right) = S\left(2^{n+6}\right) - S\left(2^{n+5}\right) + S\left(2^{n+5}\right) - S\left(2^{n+4}\right) +$$
$$+ S\left(2^{n+4}\right) - S\left(2^{n+3}\right) + S\left(2^{n+3}\right) - S\left(2^{n+2}\right) + S\left(2^{n+2}\right) - S\left(2^{n+1}\right) +$$
$$+ S\left(2^{n+1}\right) - S\left(2^{n}\right) \geqslant 1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 5 = 27.$$

Воспользовавшись леммой 1, методом математической индукции нетрудно доказать лемму 2.

Л е м м а 2. $S\left(2^{n_0+6k}\right) \geqslant S\left(2^{n_0}\right) + 27k$, *где* $k \in \mathrm{N}$.

Л е м м а 3. $S\left(2^{n_0+6k}\right) < 9m + 18\,k$, *где* $k \in \mathrm{N}$, *а* m *— количество цифр числа* 2^{n_0}.

Действительно, имеем $2^{n_0} < 10^m$, где $2^{n_0+6k} < 10^{m+2k}$, поэтому количество цифр числа 2^{n_0+6k} не больше $m + 2k$, следовательно, $S\left(2^{n_0+6k}\right) < 9\,(m + 2k)$.

Остается заметить, что лемма 2 и лемма 3 противоречат друг другу, следовательно, наше предположение неверно.

13.9. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathrm{N}$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k$ и $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, следовательно, $n + 1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + 1$; таким образом, можно создать взаимно однозначное соответствие между разбиениями числа n и теми разбиениями числа $n+1$, которые содержат слагаемое 1. Действительно,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)\,.$$

Из сказанного ясно, что число $p\,(n+1) - p\,(n)$ будет равно числу разбиений $n + 1$, не содержащих слагаемого 1.

Если $n = y_1 + y_2 + \ldots + y_l$, где $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_l \geqslant 2$, то $n + 1 = (y_1 + 1) + y_2 + \ldots + y_l$, т. е. число разбиений $n + 1$, не содержащих слагаемого 1, не меньше таких же разбиений числа n. Таким образом, $p\,(n+1) - p\,(n) \geqslant p\,(n) - p\,(n-1)$, или $p\,(n+1) + p\,(n-1) \geqslant 2p\,(n)$, $n = 2, 3 \ldots$

13.10. Пусть

$$\begin{array}{c|c}
a & b \\
\cline{2-2}
\ddots & \ldots c_{n+1} c_{n+2} \ldots \\
\cline{1-1}
\underline{-\begin{array}{c} 10a_{n+1} \\ c_{n+1}b \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{c} 10a_{n+2} \\ c_{n+2}b \end{array}} & \\
\qquad\ddots &
\end{array}$$

Имеем

$$10a_{n+1}-9b=a_{n+2},\quad 10a_{n+2}-9b=a_{n+3},\quad \ldots,\quad 10a_{n+k}-9b=a_{n+k+1},$$

где $0<a_{n+i}<b$, $i=1,2,\ldots,k$, $a_{n+k+1}\geqslant 0$, откуда

$$\frac{9b}{10}\leqslant a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_{n+k}<b.$$

а) Предположим, что $k>\left[\frac{b}{10}\right]$; в этом случае среди чисел a_{n+1}, $a_{n+2},\ldots,a_{n+k}$ какие-нибудь два окажутся равными; действительно,

$$A=\max_{1\leqslant i\leqslant k}a_{n+i}-\min_{1\leqslant i\leqslant k}a_{n+i}\leqslant b-1-\frac{9b}{10}=\frac{b}{10}-1,$$

откуда $A\leqslant\left[\frac{b}{10}\right]-1<k-1$, т. е. существуют $p<q$ чисел таких, что $a_{n+p}=a_{n+q}$. Следовательно,

$$10a_{n+p}-9b=a_{n+p+1},\quad 10a_{n+p+1}-9b=a_{n+p+2},\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad 10a_{n+q-1}-9b=a_{n+q}=a_{n+p}.$$

Складывая полученные равенства, получим $a_{n+p}+\ldots+a_{n+q-1}=$ $=(q-p)\,b$, что невозможно. Таким образом, $k\leqslant\left[\frac{b}{10}\right]$.

б) Обозначим $a_{n+i}=b-b_{n+i}$, $i=1,2,\ldots,k+1$. В этом случае $1\leqslant b_{n+1},b_{n+2},\ldots,b_{n+k}<b$ и $1\leqslant b_{n+k+1}\leqslant b$.

Заметим, что $b_{n+2}=10b_{n+1}$, $b_{n+3}=10b_{n+2},\ldots,b_{n+k+1}=10b_{n+k}$, следовательно, $b_{n+k+1}=10^kb_{n+1}$, где $10^k\leqslant 10^kb_{n+1}\leqslant b$, или $k\leqslant[\lg b]$.

З а м е ч а н и е. Если $b=10^k$ и $a=\underbrace{99\ldots9}_{k}$, то $\frac{a}{b}=0,\underbrace{99\ldots9}_{\lg b}$.

13.11. Рассмотрим множество

$$X=\{4^\alpha q\mid 4^\alpha q\leqslant n,\ \alpha\in Z_0,\ q\ \text{нечетно}\}.$$

Ясно, что отношение никаких двух элементов множества X не равно 2, следовательно, $f(n)\geqslant|X|$, где через $|X|$ обозначено число элементов множества X.

Пусть $Y\subset\{1,2,\ldots,n\}$ и $|Y|>|X|$, поставим любому числу a из X в соответствие пару $(a,\,2a)$. Имеем $2a\notin X$ и $|\{(a,2a)\}|=|X|$, следовательно, для какого-то a $a\in Y$, $2a\in Y$. Отсюда следует, что $f(n)\leqslant|X|$, поэтому $f(n)=|X|$.

Пусть $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}$, где $k_1>k_2>\ldots>k_m\geqslant 0$. Рассмотрим следующие множества:

$$X_0=\{2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_i}\mid i\in\{1,2,\ldots,m\},\ k_i\ \text{четно}\},$$

$$X_i=\{2^{r_1}+2^{r_2}+\ldots+2^{r_i}\mid r_1>r_2>\ldots>r_i\geqslant 0,\ r_i\ \text{четно}$$
$$\text{и}\ r_1=k_1,r_2=k_2,\ldots,r_{i-1}=k_{i-1},r_i<k_i\}.$$

Ясно, что множества $X_0, X_1, \ldots, X_m$ попарно не пересекаются и $X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_m$, следовательно,

$$|X| = |X_0| + |X_1| + \ldots + |X_m|\,.$$

Обозначим количество четных чисел среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ через λ, а количество нечетных — через μ.

Имеем $|X_0| = \lambda$. Докажем, что

$$|X_i| = \begin{cases} \dfrac{2^{k_i+1}-1}{3}, & k_i \text{ нечетно,} \\ \dfrac{2^{k_i+1}-2}{3}, & k_i \text{ четно.} \end{cases}$$

Действительно, пусть k_i четно. Заметим, что $|X_i|$ на единицу меньше количества чисел из $(2^{r_i} + \ldots + 2^{r_t} \leqslant 2^{k_i} - 1)$ $1, 2, \ldots, 2^{k_i}$, каноническое разложение которых содержит четную степень 2, т. е.

$$2^{k_i} - 2^{k_i-1} + 2^{k_i-2} - 2^{k_i-3} + \ldots + 2^2 - 2 + 1 - 1 = \\ = \frac{(-2)^{k_i+1} - 1}{-2-1} - 1 = \frac{2^{k_i+1}-2}{3}.$$

В случае нечетного k_i доказательство аналогично. Таким образом,
$$f(n) = \lambda + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}\lambda - \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{\lambda - \mu}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{(-1)^{k_1} + \ldots + (-1)^{k_m}}{3}.$$

13.12. Имеем $n = \underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ слагаемых}}$ $n = 3^2 + 3^2 + \underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{(n-18) \text{ слагаемых}}$ и $n = 2^2 + 2^2 + 3^2 + \underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{(n-17) \text{ слагаемых}}$, следовательно, число n можно представить в виде суммы квадратов m натуральных чисел, где $m \in \in \{n-16, n-14, n\}$.

С другой стороны, если $n = 4^k + 4^k + 4^k + 4^k + x_1^2 + \ldots + x_{m-4}^2$, то $n = 4^{k+1} + x_1^2 + \ldots + x_{m-4}^2$, где $k = 0, 1, \ldots$; следовательно, n можно представить также в виде суммы квадратов $m-3$ натуральных чисел.

Таким образом, учитывая, что $n = \underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ слагаемых}}$, и вышесказанное, получим, что число n можно представить в виде суммы квадратов m натуральных чисел, где $m \in \{n, n-3, n-6, \ldots\}$ и $m \geqslant \geqslant c_0 + c_1 + \ldots + c_k$, а $\overline{c_k c_{k-1} \ldots c_0}$ — запись n в 4-й системе.

Следовательно, $c_0 + c_1 + \ldots + c_k \leqslant 3(k+1)$ и $4^k \leqslant n < 4^{k+1}$, откуда $k = [\log_4 n]$. Для завершения решения достаточно заметить, что

$$\{n, n-3, n-6, \ldots\} \cup \\ \cup \{n-14, n-17, n-20, \ldots\} \cup \{n-16, n-19, n-22, \ldots\} \supset \\ \supset \{n-14, n-13, n-12, \ldots, 3[\log_4 n] + 5\}\,.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства 1–4.

1. $\left|\sqrt{a}-\dfrac{p+aq}{p+q}\right| \leqslant \dfrac{p}{q}$, где $a, p, q \in \mathrm{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathrm{N}$ и $\left|\sqrt{a}-\dfrac{p}{q}\right| \leqslant 1$.

2. а) $S\,(mn) \leqslant S\,(m)\,S\,(n)$, где $n, m \in \mathrm{N}$.

б) $S\,(m+n) \leqslant S\,(m)+S\,(n)$, где $n, m \in \mathrm{N}$.

(См. упр. 13.8.)

3. $S\,(1981^n) \geqslant 19$, где $n \in \mathrm{N}$.

4. $S\,(1998^n) > 10^6$ для всех натуральных n, начиная с какого-то числа.

5. Докажите, что для любого числа M существует такое натуральное n, что $\dfrac{S\,(n)}{S\,(n^2)} > M$.

6. Докажите, что число 5^{2l} можно представить в виде суммы квадратов m, где $l \in \mathrm{N}$ и $1 \leqslant m \leqslant 2^l$.

7. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором при любом разбиении натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ на две группы в одной из них найдутся три числа составляющих геометрическую прогрессию.

8. Пусть целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что $1 < a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_k \leqslant n$ и $a_1 a_2 \ldots a_k$ не делится на a_i^2, $i = 1, 2, \ldots, k$. Докажите, что $k \leqslant \pi\,(n)$, где $\pi\,(n)$ — количество простых чисел не превышающих n.

9. Пусть k — заданное натуральное число. Докажите, что последовательность $\dfrac{S(n)}{S(kn)}$ будет ограниченна тогда и только тогда, когда $k = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots\}$.

10. Пусть $x \geqslant 1$ и $A(x)$ — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, [x]$. Докажите, что:

а) $A\left(\dfrac{x}{2}\right) \dfrac{[x]!}{\left(\left[\dfrac{x}{2}\right]!\right)^2} \geqslant A(x)$, где $x \geqslant 2$; б) $A(x) < 5^x$;

в) $A(2n)A\left(\dfrac{2n}{3}\right) \geqslant A\,(n)\,\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, где $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$;

г) $A(2n) > A\,(n)\,A\,(\sqrt{2n})$, где $n \in \mathrm{N}$, $n \geqslant 100$;

д) в области $(n, 2n)$ имеется простое число, где $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$.

Указание. д) Докажите, что если предположить, что в интервале $(n, 2n)$ нет простого числа, то $A(n)A(\sqrt{2n}) \vdots A(2n)$.

11. Докажите, что $\frac{d(1)}{1^2} + \frac{d(2)}{2^2} + \ldots + \frac{d(n)}{n^2} < 2{,}78$, где $d(k)$ — количество натуральных делителей числа k.

Указание. $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^2}\right)$.

12. Найдите все те числа α, для которых имеет место следующее условие: для любого натурального числа n существует целое число m такое, что $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{3n}$.

13. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ — такие натуральные числа, что никакая сумма некоторых из них не равна сумме некоторых других.

Докажите, что:

а) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

14. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа. Докажите, что

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

Указание. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $a_i = i + b_i$; тогда $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.

§ 14. РАЗЛИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В данном параграфе рассмотрим неравенства из таких разделов математики и доказываемые такими способами, для которых не предусмотрен отдельный параграф.

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите неравенства 14.1–14.5.

14.1. $$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}.$$

14.2. $\dfrac{(a-b)^2}{2\,(a+b)} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{(a-b)^2}{a+b}$, где $a, b > 0$.

14.3. $x_2^{1/n}-x_1^{1/n} \leqslant (x_2-\alpha)^{1/n}-(x_1-\alpha)^{1/n}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $n \in \mathrm{N}$.

14.4. $$\left|\sqrt[n]{a_1^n+\ldots+a_k^n} - \sqrt[n]{b_1^n+\ldots+b_k^n}\right| \leqslant |a_1-b_1|+\ldots+|a_k-b_k|,$$

где $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k > 0$, $n \in \mathrm{N}$.

14.5. $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24.$

14.6. Известно, что $a^2-4a+b^2-2b+2 \leqslant 0$, $c^2-4c+d^2-2d+2 \leqslant 0$ и $e^2-4e+f^2-2f+2 \leqslant 0$. Найдите наибольшее значение выражения $(a-c)\,(f-d)+(c-e)\,(b-d)$.

14.7. Докажите, что если последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ неограниченна и возрастает, то для достаточно больших k справедливо следующее неравенство:

а) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_k}{a_{k+1}} < k-\dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_k}{a_{k+1}} < k-1985.$

14.8. Докажите неравенство Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r},$$

где $r>1$, $a_i, b_i \geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$.

14.9. Докажите, что если функция $f(x)$ в области $[0,+\infty)$ возрастает и непрерывна, $f(0)=0$, то $\int\limits_0^a f(x)\,dx+\int\limits_0^b f^{-1}(x)\,dx \geqslant ab$, где $f^{-1}(x)$ — функция, обратная $f(x)$ и $a,b>0$.

14.10. а) Докажите тождество

$$\begin{aligned}&x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=\\&\quad=x_1(y_1-y_2)+(x_1+x_2)(y_2-y_3)+(x_1+x_2+x_3)(y_3-y_4)+\ldots\\&\qquad\ldots+(x_1+\ldots+x_{n-1})(y_{n-1}-y_n)+(x_1+\ldots+x_n)\,y_n.\end{aligned}$$

б) Докажите, что если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$, то

$$\begin{aligned}&x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_ny_1 \leqslant\\&\qquad\leqslant x_1y_{i_1}+x_2y_{i_2}+\ldots+x_ny_{i_n} \leqslant x_1y_1+\ldots+x_ny_n,\end{aligned}$$

где числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — это некоторое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$.

14.11. Докажите неравенства:

а) $x_1+\ldots+x_n \geqslant n$, где $x_1,\ldots,x_n>0$, $x_1\ldots x_n=1$;

б) $\dfrac{1}{a_1(a_2+1)}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}(a_n+1)}+\dfrac{1}{a_n(a_1+1)} \geqslant \dfrac{n}{1+a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$, где $n\geqslant 2$, $(n-3)(a_i-1)\geqslant 0$, $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$.

в) $$\begin{aligned}&3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right)\geqslant\\&\qquad\geqslant\frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1},\end{aligned}$$

где $A, M, S>0$;

г) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\right)\geqslant\dfrac{9}{1+abc}$, где $a,b,c>0$.

14.12. Докажите неравенство

$$\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_n)\geqslant\varphi(y_1)+\ldots+\varphi(y_n),$$

где $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$, $x_1+\ldots+x_k \geqslant y_1+\ldots+y_k$ $(k=1,\ldots,n-1)$, $x_1+\ldots+x_n = y_1+\ldots+y_n$ и для любого x из области I $\varphi''(x) > 0$ $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in I)$.

14.13. Докажите неравенство $b_1+\ldots+b_n \geqslant a_1+\ldots+a_n$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, $b_1 \geqslant a_1$, $b_1b_2 \geqslant a_1a_2, \ldots, b_1b_2\ldots b_n \geqslant a_1a_2\ldots a_n$.

14.14. Докажите, что для углов α,β,γ остроугольного треугольника справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

14.15. Докажите, что для углов α,β,γ тупоугольного треугольника справедливо двойное неравенство

$$0 < \sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} < 1 + \sqrt[4]{8}.$$

14.16. Докажите неравенство $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n}-2$, где $n \in \mathrm{N}$.

14.17. Докажите, что $a,b,c,d > 0$, если $S_1 = a+b+c+d > 0$, $S_2 = ab+bc+cd+ad+ac+bd > 0$, $S_3 = abc+bcd+cda+abd > 0$, $S_4 = abcd > 0$.

14.18. Докажите неравенство $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, где $n \in \mathrm{N}$ и $n \geqslant 8$.

14.19. Докажите, что $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right) < 3$, где $n \in \mathrm{N}$.

14.20. Докажите, что если $g(x)$ — выпуклая функция на отрезке $[0,a_1]$ (см. § 1) и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2m} \geqslant a_{2m+1} \geqslant 0$, то

$$g(a_1)-g(a_2)+g(a_3)-\ldots+g(a_{2m+1}) \geqslant g(a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2m+1}).$$

14.21. Пусть абсолютное значение многочлена $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ на отрезке $[-1,1]$ не превышает 1. Докажите, что $|a| \leqslant 4$.

14.22. Пусть многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ $(n > 1)$ имеет n отрицательных корней. Докажите, что $a_1P(1) \geqslant 2n^2a_0$.

14.23. Полный граф имеет n вершин, и каждая из ребер окрашена в один из двух заданных цветов. Обозначим через $t(n)$ число тех треугольников, стороны которых окрашены в один и тот же цвет.

Докажите, что

$$t(n) \geqslant \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3}, & n = 2k, \\ \dfrac{2}{3}k(k-1)(4k+1), & n = 4k+1, \\ \dfrac{2}{3}k(k+1)(4k-1), & n = 4k+3. \end{cases}$$

14.24. Граф имеет n $(n \geqslant 3)$ вершин. Число его ребер больше $\dfrac{n^2}{4}$. Докажите, что треугольников, образованных этими ребрами не меньше $\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

14.25. Докажите, что если α $(\alpha > 0)$ — иррациональное число и $0 < a < b < 1$, то существует такое натуральное число n, что $a < \{n\alpha\} < b$.

14.26. Пусть $x_1 + \ldots + x_n = 0$ и $x_i \in [m, M]$, $i = 1, \ldots, n$.

Докажите, что:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant -mMn$; б) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leqslant -mMn(m^2 + M^2 + mM)$.

14.27. Докажите неравенство $(x^2 + y^2)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m - y^m)^2$, где $m \in \mathrm{N}$.

14.28. Докажите неравенство

$$\cos(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma)\cos(\gamma - \alpha) \geqslant 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы некоторого треугольника.

14.29. Докажите неравенство $\left|\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n}\right| < 3$.

14.30. Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_2}{2}\,\frac{a_2 + a_3}{2}\ldots\frac{a_{n-1} + a_n}{2}\,\frac{a_n + a_1}{2} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\,\frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}\ldots\frac{a_n + a_1 + a_2}{3},$$

где $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $n \geqslant 3$.

14.31. Докажите, что если $x, y, z \geqslant 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то:

а) $1 \leqslant \dfrac{x}{1 - yz} + \dfrac{y}{1 - zx} + \dfrac{z}{1 - xy} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $1 \leqslant \dfrac{x}{1 + yz} + \dfrac{y}{1 + zx} + \dfrac{z}{1 + xy} \leqslant \sqrt{2}$.

14.32. При каких значениях λ неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \qquad (14.1)$$

верно для любых положительных чисел a, b, c?

РЕШЕНИЯ

14.1. Рассмотрим совокупность точек

$$A_1(0,0),\quad A_2(a_1,b_1),\quad A_3(a_1+a_2,b_1+b_2),\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad A_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n, b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Поскольку $A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_nA_{n+1}\geqslant A_1A_{n+1}$, следовательно,

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}.$$

14.2. Преобразуем выражение $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}$ к следующему виду:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}=$$
$$=\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}.$$

Таким образом, остается доказать двойное неравенство

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\leqslant a+b,$$

левая часть которого очевидна, так как $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}>0$.

Для доказательства правой части докажем неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

или неравенство

$$\frac{(a-b)^2}{4\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\dfrac{a+b}{2}\right)}\leqslant\frac{(a-b)^2}{4\left(\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)},$$

которое также очевидно, так как $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{ab}$.

14.3. Имеем

$$x_2^{1/n} - x_1^{1/n} = \frac{x_2 - x_1}{\left(x_2^{1/n}\right)^{n-1} + \left(x_2^{1/n}\right)^{n-2} x_1^{1/n} + \ldots + \left(x_1^{1/n}\right)^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x_2 - x_1}{\left((x_2-\alpha)^{1/n}\right)^{n-1} + \left((x_2-\alpha)^{1/n}\right)^{n-2}(x_1-\alpha)^{1/n} + \ldots + \left((x_1-\alpha)^{1/n}\right)^{n-1}} =$$

$$= (x_2-\alpha)^{1/n} - (x_1-\alpha)^{1/n}.$$

14.4. Преобразуем выражение $\sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} - \sqrt[n]{b_1^n + \ldots + b_k^n}$ следующим образом:

$$\left|\sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} - \sqrt[n]{b_1^n + \ldots + b_k^n}\right| = \frac{|a_1^n + \ldots + a_k^n - b_1^n - \ldots - b_k^n|}{A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + B^{n-1}},$$

где $A = \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n}$, $B = \sqrt[n]{b_1^n + \ldots + b_k^n}$.

Таким образом,

$$|A - B| =$$

$$= \frac{|(a_1-b_1)(a_1^{n-1} + \ldots + b_1^{n-1}) + \ldots + (a_k-b_k)(a_k^{n-1} + a_k^{n-2}b_k + \ldots + b_k^{n-1})|}{A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + B^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant |a_1 - b_1| \left|\frac{a_1^{n-1} + \ldots + b_1^{n-1}}{A^{n-1} + \ldots + B^{n-1}}\right| + \ldots + |a_k - b_k| \left|\frac{a_k^{n-1} + \ldots + b_k^{n-1}}{A^{n-1} + \ldots + B^{n-1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |a_1 - b_1| + \ldots + |a_k - b_k|,$$

так как $A > a_i > 0$, $B > b_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

14.5. Имеем

$$2\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2} = \frac{\sqrt{10001}-1}{2} > \frac{100-1}{2} > 48,$$

откуда $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$.

14.6. Точки $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,f)$ находятся внутри окружности с центром $O(2,1)$ и радиусом $\sqrt{3}$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BA}=\{a-c, b-d\}$, $\overrightarrow{BC}=\{e-c, f-d\}$ и $\overrightarrow{BD}=\{f-d, c-e\}$. Заметим, что $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, следовательно, $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)^{\wedge}=|90^\circ-\beta|$, или $90^\circ+\beta$, где $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)^{\wedge}=\beta$. То есть

$$\left|\vec{BA}\cdot\vec{BD}\right|=BA\cdot BD\cdot|\cos(90^\circ\pm\beta)|=$$
$$=BA\cdot BD\sin\beta=BA\cdot BC\sin\beta=2S_{\Delta ABC}.$$

Таким образом,

$$|(a-c)(f-d)+(c-e)(b-d)|\leqslant 2S_{\Delta ABC}\leqslant 2\,\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2},$$

так как из всех треугольников, вписанных в окружность радиусом $\sqrt{3}$, наибольшую площадь имеет равносторонний (см. решение упр. 2.7).

Остается заметить, что выражение $(a-c)(f-d)+(c-e)(b-d)$ может принять значение $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. Значит, наибольшее значение данного выражения есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

14.7. а) Обозначим $\frac{a_1}{a_2}=1+\alpha_1$, $\frac{a_2}{a_3}=1+\alpha_2,\ldots,\frac{a_k}{a_{k+1}}=1+\alpha_k$. В этом случае $-1<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k<0$. Имеем

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)=\frac{a_1}{a_{k+1}}.$$

Так как a_k неограниченна, то существует такое число k_0, что в случае $k\geqslant k_0$ $\frac{a_1}{a_{k+1}}<\frac{1}{2}$, следовательно,

$$\frac{1}{2}>(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)\geqslant 1+\alpha_1+\ldots+\alpha_k$$

(упр. 10.6), откуда следует $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-\frac{1}{2}$.

б) Пусть числа $k_1,k_2,\ldots,k_{2\cdot1985}$ такие, что

$$\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_{k_1}}{a_{k_1+1}}<k_1-\frac{1}{2},$$
$$\frac{a_{k_1+1}}{a_{k_1+2}}+\ldots+\frac{a_{k_2}}{a_{k_2+1}}<(k_2-k_1)-\frac{1}{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{a_{k_{s-1}+1}}{a_{k_{s-1}+2}}+\ldots+\frac{a_{k_s}}{a_{k_s+1}}<(k_s-k_{s-1})-\frac{1}{2}\qquad(S=2\cdot1985).$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{k_s}}{a_{k_s+1}}<k_s-S\cdot\frac{1}{2}=k_s-1985.$$

Следовательно, при $k\geqslant k_S$

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985,$$

так как $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}<1$.

14.8. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\,(a_i+b_i)^{r-1}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\,(a_i+b_i)^{r-1}$.

Согласно неравенству из упр. 11.10

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\,(a_i+b_i)^{r-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{r-1}\right)^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r},$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\,(a_i+b_i)^{r-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{r-1}\right)^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{(r-1)/r}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}\right),$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}.$$

14.9. При $b<f(a)$ имеем $\int\limits_0^a f(x)\,dx=S_1+S_2$, $\int\limits_0^b f^{-1}(y)\,dy=$ $=S_3$, где $S_1+S_3=ab$, следовательно, $ab\leqslant\int\limits_0^a f(x)\,dx+\int\limits_0^b f^{-1}(x)\,dx$.
Доказательство в случае $b\geqslant f(a)$ аналогично.

14.10. а) $x_1(y_1-y_2)+(x_1+x_2)(y_2-y_3)+$
$+(x_1+x_2+x_3)(y_3-y_4)+\ldots+(x_1+\ldots+x_{n-1})(y_{n-1}-y_n)+$
$+(x_1+\ldots+x_n)\,y_n=x_1y_1+(x_1+x_2-x_1)\,y_2+\ldots$
$\ldots+((x_1+\ldots+x_n)-(x_1+\ldots+x_{n-1}))\,y_n=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.

б) Имеем

$$x_1y_{i_1}+x_2y_{i_2}+\ldots+x_ny_{i_n}=y_{i_1}(x_1-x_2)+(y_{i_1}+y_{i_2})(x_2-x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(y_{i_1}+y_{i_2}+\ldots+y_{i_{n-1}})(x_{n-1}-x_n)+(y_{i_1}+\ldots+y_{i_n})\,x_n\leqslant$$

$$\begin{aligned} &\leqslant y_1(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(x_2-x_3)+\ldots\\ &\quad \ldots+(y_1+\ldots+y_{n-1})(x_{n-1}-x_n)+\\ &\qquad +(y_1+\ldots+y_n)x_n=x_1y_1+\ldots+x_ny_n. \end{aligned}$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

14.11. а) Пусть $x_1=\dfrac{a_1}{a_2}$, $x_2=\dfrac{a_2}{a_3},\ldots,x_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, где a_1, $a_2,\ldots,a_n>0$.

В этом случае $x_n=\dfrac{a_n}{a_1}$. Используя неравенство из упр. 14.10, б) для чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и $\dfrac{1}{a_1},\dfrac{1}{a_2},\ldots,\dfrac{1}{a_n}$, получим

$$a_1\frac{1}{a_1}+a_2\frac{1}{a_2}+\ldots+a_n\frac{1}{a_n}\leqslant a_1\frac{1}{a_2}+a_2\frac{1}{a_3}+\ldots+a_{n-1}\frac{1}{a_n}+a_n\frac{1}{a_1},$$

или $n\leqslant x_1+x_2+\ldots+x_n$.

б) Заметим, что

$$(1+a_1a_2\ldots a_n)\left(\frac{1}{a_1(a_2+1)}+\ldots+\frac{1}{a_n(a_1+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1(a_2+1)}+\ldots+\frac{1}{a_n(a_1+1)}+\frac{a_2\ldots a_n}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}}{a_1+1}=A.$$

При $n\geqslant 3$ получим

$$A\geqslant\frac{1}{a_1(a_2+1)}+\ldots+\frac{1}{a_n(a_1+1)}+\frac{a_1a_2}{a_1+1}+\frac{a_2a_3}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_1a_n}{a_n+1}=B.$$

Нетрудно доказать, что числа $\dfrac{1}{a}$, b и $\dfrac{1}{b+1}$, $\dfrac{a}{a+1}$ $(a,b>0)$ имеют одинаковую упорядоченность, и поэтому

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{ab}{a+1}\geqslant\frac{1}{a}\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}b \tag{14.2}$$

(см. упр. 14.10, б)).

Согласно (1) получим

$$B\geqslant\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}\right)+\left(\frac{1}{a_2+1}+\frac{a_3}{a_3+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_n+1}+\frac{a_1}{a_1+1}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{a_1}{a_1+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_n+1}+\frac{a_n}{a_n+1}\right)=n.$$

Поэтому

$$(1+a_1\ldots a_n)\left(\frac{1}{a_1(a_2+1)}+\ldots+\frac{1}{a_n(a_1+1)}\right)\geqslant n.$$

При $n=2$ имеем $a_1,a_2\leqslant 1$, следовательно,

$$(1+a_1a_2)\left(\frac{1}{a_1(a_2+1)}+\frac{1}{a_2(a_1+1)}\right)=$$

$$= \frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+1} + \frac{1}{a_1\,(a_2+1)} + \frac{1}{a_2\,(a_1+1)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} = 2.$$

в) Достаточно заметить, что

$$\frac{3+A+M+S+\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{S}+\dfrac{A}{M}+\dfrac{M}{S}+\dfrac{S}{A}}{(A+1)(M+1)(S+1)} =$$
$$= \frac{1}{A(M+1)} + \frac{1}{M(S+1)} + \frac{1}{S(A+1)};$$

тогда остается использовать неравенство из упр. 14.11, б) при $n = 3$.

г) Пусть

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \leqslant \frac{1}{a(1+c)} + \frac{1}{c(1+b)} + \frac{1}{b(1+a)};$$

тогда, поскольку

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \leqslant \frac{1}{a(1+a)} + \frac{1}{b(1+b)} + \frac{1}{c(1+c)}$$

(см. упр. 14.10, б)), имеем

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 3\left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)}\right) \geqslant \frac{9}{1+abc}$$

(см. упр. 14.11, б)).

14.12. Сначала докажем, что $\varphi(u) \geqslant \varphi(x) + (u-x)\varphi'(x)$. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(u) - \varphi(x) + (x-u)\varphi'(x)$; тогда $f'(x) = (x-u)\varphi''(x)$. Следовательно, в случае $x > u$ $f(x)$ возрастает, а при $x < u$ $f(x)$ убывает, т. е. $f(x) \geqslant f(u) = 0$, или $\varphi(u) \geqslant \varphi(x) + (u-x)\varphi'(x)$, откуда

$$\varphi(x_1) \geqslant \varphi(y_1) + (x_1-y_1)\,\varphi'(y_1)\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi(x_n) \geqslant \varphi(y_n) + (x_n-y_n)\,\varphi'(y_n)\,.$$

Получаем

$$\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(y_1) + \ldots + \varphi(y_n) + (x_1-y_1)\,\varphi'(y_1) + \ldots + (x_n-y_n)\,\varphi'(y_n)\,.$$

Теперь докажем, что $(x_1-y_1)\,\varphi'(y_1) + \ldots + (x_n-y_n)\,\varphi'(y_n) \geqslant 0$. Действительно, согласно тождеству из упр. 14.10, а) имеем

$$(x_1 - y_1)\,\varphi'(y_1) + \ldots + (x_n - y_n)\,\varphi'(y_n) = (x_1 - y_1)\,(\varphi'(y_1) - \varphi'(y_2)) + \\ + (x_1 - y_1 + x_2 - y_2)\,(\varphi'(y_2) - \varphi'(y_3)) + \ldots \\ \ldots + (x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \ldots + x_n - y_n)\,\varphi'(y_n) \geqslant 0,$$

так как $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ и $\varphi'(y_{k-1}) - \varphi'(y_k) \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n-1;$ $\varphi'(x)$ возрастает).

Таким образом, $\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n) \geqslant \varphi(y_1) + \ldots + \varphi(y_n)$.

14.13. Рассмотрим числа $\ln a_1, \ln a_2, \ldots, \ln a_n$ и $\ln b_1, \ln b_2, \ldots$ $\ldots, \ln b_{n-1}, \ln b'_n$ $\left(\text{где } b'_n = \dfrac{a_1 \ldots a_n}{b_1 \ldots b_{n-1}}\right)$ и функцию $\varphi(x) = e^x$; в этом случае имеют место условия неравенства из упр. 14.12, следовательно, $\varphi(b_1) + \ldots + \varphi(b'_n) \geqslant \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)$, или

$$b_1 + \ldots + b_{n-1} + b'_n \geqslant a_1 + \ldots + a_n.$$

С другой стороны, $b'_n = \dfrac{a_1 \ldots a_n}{b_1 \ldots b_{n-1}} \leqslant b_n$, следовательно,

$$b_1 + \ldots + b_n \geqslant a_1 + \ldots + a_n.$$

14.14. Рассмотрим функцию $f(x) = -\sin\dfrac{x}{2}$ в области $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем $f''(x) = \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2} > 0$, когда $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$; в этом случае имеем

$$\alpha \geqslant \frac{\pi}{3}, \qquad \alpha + \beta \geqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3},$$

следовательно, согласно неравенству из упр. 14.12 имеем

$$f(\beta) + f(\gamma) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

или

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\pi}{2} > \alpha, \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} > \alpha + \beta, \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 0 = \alpha + \beta + \gamma,$$

следовательно, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f(0) > f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$, или

$$\sqrt{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}.$$

14.15. Доказательство неравенства $\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} > 0$ очевидно. Докажем второе неравенство. Рассмотрим функцию $f(x) = -\sqrt{\sin x}$ области $(0, \pi)$; в этом случае

$$f''(x) = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{4\sin x\sqrt{\sin x}} > 0,$$

когда $x \in (0, \pi)$.

Поскольку в случае $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

$$\alpha > \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha + \beta > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4},$$

то согласно неравенству из упр. 14.12

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

или $\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} < 1 + \sqrt[4]{8}$.

Второе решение. Заметим, что $x + y \leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}$, следовательно при $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} < 1 + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \sqrt{2(\sin\beta + \sin\gamma)} \leqslant 1 + \sqrt{4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} < 1 + \sqrt{2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt[4]{8}.$$

14.16. Имеем

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= 2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) =$$

$$= 2\sqrt{n+1} - 2 > 2\sqrt{n} - 2.$$

14.17. Рассмотрим многочлен $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Поскольку $P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4$ и $P(a) = 0$, то $a^4 = S_1a^3 - S_2a^2 + S_3a - S_4$.

Когда $a \leqslant 0$, имеем $S_1a^3 - S_2a^2 + S_3a - S_4 < 0$, а $a^4 \geqslant 0$, и полученные неравенства противоречат тождеству, следовательно, $a > 0$. Аналогично докажем, что $b, c, d > 0$.

14.18. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{n!}{n\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. В этом случае

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

(упр. 9.32, г)), следовательно, $a_{n+1} < \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) a_n$. Далее,

$$a_n < \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\, a_{n-1} < \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}}\, a_{n-2} < \ldots$$

$$\ldots < \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} \ldots \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\, a_1 = \frac{a_1}{\sqrt{n}} = \frac{e}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, $a_n < \dfrac{e}{\sqrt{n}}$, следовательно, в случае $n \geqslant 8$ $a_n < \dfrac{e}{\sqrt{8}} <$ < 1.

14.19. Пользуясь методом математической индукции, нетрудно доказать, что $2^n \geqslant n^2 - 1$, $n \in \mathrm{N}$. Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\frac{2^2}{13}\frac{3^2}{24}\ldots\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} = \frac{3n}{n+1} < 3.$$

14.20. Пусть $a, b, c \in [0, a_1]$ и $a \geqslant b \geqslant c$. Когда $b \leqslant \dfrac{a+c}{2}$, имеют место условия

$$a \geqslant a-b+c, \quad a+c = (a-b+c)+b, \quad a-b+c \geqslant b,$$

следовательно, согласно упр. 2.8 $g(a)+g(c) \geqslant g(a-b+c)+g(b)$, или $g(a)-g(b)+g(c) \geqslant g(a-b+c)$.

Если же $b \geqslant \dfrac{a+c}{2}$, имеют место условия

$$a \geqslant b, \quad a+c = b+(a-b+c), \quad b \geqslant a-b+c,$$

следовательно, снова $g(a)+g(c) \geqslant g(a-b+c)+g(b)$.

Таким образом, и в этом случае $g(a)-g(b)+g(c) \geqslant g(a-b+c)$.

Из последнего и упр. 7.5 и получим доказательство рассматриваемого неравенства (взять $f(x) = g(x) - g(0)$).

14.21. Рассмотрим многочлен $F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. В этом случае согласно формуле Лагранжа*)

$$F(x) = F(-2)\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{-12} + F(-1)\,\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6} +$$
$$+ F(1)\,\frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{-6} + F(2)\,\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{12},$$

*) Если $P(x)$ — многочлен n-й степени, а $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — различные действительные числа, то

$$P(x) = P(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})} +$$
$$+ P(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)(x_2-x_{n+1})} + \ldots$$
$$\ldots + P(x_{n+1})\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}.$$

следовательно,

$$a = F(0) = \frac{F(-2)}{-6} + \frac{2}{3}F(-1) + \frac{2}{3}F(1) - \frac{1}{6}F(2).$$

С другой стороны, $F(x) = x^3 p\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, откуда

$$F(2) = 8p\left(\frac{1}{2}\right), \quad F(-2) = -8p\left(-\frac{1}{2}\right), \quad F(1) = p(1), \quad F(-1) = -p(-1).$$

Таким образом,

$$a = \frac{4}{3}\,p\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\,p(-1) + \frac{2}{3}\,p(1) - \frac{4}{3}\,p(2),$$

следовательно,

$$|a| \leqslant \frac{4}{3}\left|p\left(-\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{2}{3}\,|p\,(-1)| + \frac{2}{3}\,|p\,(1)| + \frac{4}{3}\,|p\,(2)| \leqslant \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

Заметим, что многочлен $F(x) = 4x^3 - 3x$ удовлетворяет условию задачи (если обозначить $x = \cos\alpha$, то $F(x) = \cos 3\alpha$).

14.22. Пусть корни многочлена $P(x)$ — числа $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$, где $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Имеем $P(x) = (x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n)$, откуда $a_0 = b_1 b_2 \ldots b_n$ и $a_1 = a_0\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right)$. Таким образом, необходимо доказать, что

$$\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right)(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n) \geqslant 2n^2, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Воспользуемся неравенством Коши $\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}$ и $1 + b_i = \underbrace{\frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}}_{n-1 \text{ членов}} + b_i \geqslant n\sqrt[n]{\frac{b_i}{(n-1)^{n-1}}}$ $(i = 1, \ldots, n)$; получим

$$\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right)(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n) \geqslant$$
$$\geqslant n^2\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant n^2\left(1 + (n-1)\frac{1}{n-1}\right) = 2n^2.$$

Для завершения доказательства мы воспользовались неравенством Бернулли.

14.23. Назовем два отрезка, имеющих общую вершину *птичкой*, а сами отрезки — *крыльями*. Число не одноцветных треугольников равно $C_n^3 - t(n)$. Каждый не одноцветный треугольник содержит птички с разноцветными крыльями. Следовательно, число птичек с разноцветными крыльями равно $2(C_n^3 - t(n))$. С другой стороны, если из какой-нибудь вершины выходит k отрезков первого цвета и $n - 1 - k$ отрезков второго цвета, то количество птичек с разноцветными

крыльями, содержащих эту вершину (оба крыла содержат эту вершину), равно $k(n-1-k)$.

Заметим, что

$$k(n-1-k) \leqslant \begin{cases} \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right), & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$2\left(C_n^3 - t(n)\right) \leqslant \begin{cases} \dfrac{(n-1)^2 n}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{n^2}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right), & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Итак, получим:

когда $n = 2k$,

$$t(n) \geqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n^2(n-2)}{8} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3};$$

когда $n = 4k+1$,

$$t(n) \geqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)^2}{8} = \frac{2}{3}k(k-1)(4k+1);$$

когда $n = 4k+3$,

$$t(n) \geqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)^2}{8} = \frac{2}{3}k(k+1)(4k-1).$$

14.24 Докажем методом математической индукции. В случае $n = 3, 4$ утверждение задачи правильное.

Пусть утверждение задачи справедливо для $n \leqslant k-1$ точек. Докажем, что оно справедливо также для $n = k$ точек $(k \geqslant 5)$.

Выделим два случая.

а) Любое ребро образует треугольник.

В этом случае число образованных треугольников больше $\dfrac{k^2}{12}$, следовательно не меньше $\left[\dfrac{k}{2}\right]$, $k = 5, 6, \ldots$

б) Существует ребро AB, которое не образует треугольник. Обозначим остальные вершины графа через $A_1, A_2, \ldots, A_{k-2}$. В этом случае или вершина A_i не соединена или с A, или с B $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, k-2)$. Следовательно, число ребер с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{k-2}$ больше $\left(\dfrac{k^2}{4} - (k-1)\right)$, поэтому число треугольников, образованных данными вершинами, не меньше $\left(\left[\dfrac{k}{2}\right] - 1\right)\left(\dfrac{k^2}{4} - (k-1) = \dfrac{(k-2)^2}{4}\right)$.

Пусть одним из этих треугольников является $A_1A_2A_3$. Если ни одна из вершин A_i не соединена ни с A, ни с B, то мы не будем рассматривать отрезок A_1A_2. В этом случае точки $A_1, A_2, \ldots, A_{k-2}$ опять соединены $\dfrac{(k-2)^2}{4}$ отрезками. Значит, существует по крайней мере $\left[\dfrac{k}{2}\right]-1$ треугольников, и вместе с $A_1A_2A_3$ будет $\left[\dfrac{k}{2}\right]$ треугольников.

Осталось рассмотреть случай, когда A соединен с вершинами A_1, $A_2, \ldots, A_m$, а B с остальными. Если отрезок A_iA_j является ребром для каких-либо $(i;j)$, $i<j\leqslant m$ или $m<i<j$, то задача снова решена. В противном случае число ребер с вершинами A_1, $A_2, \ldots, A_{k-2}$ не больше $m(k-2-m)$, что невозможно, так как $m(k-2-m)\leqslant\dfrac{(k-2)^2}{4}$.

14.25. Заметим, что числа $\{n\alpha\}$ отличаются друг от друга. Действительно, пусть $\{i\alpha\}=\{j\alpha\}$, $i\neq j$; в этом случае $i\alpha=j\alpha+k$, $k\in Z$, откуда $\alpha=\dfrac{k}{i-j}\in Q$, что невозможно.

Пусть $m\in\mathrm{N}$ и $\dfrac{1}{m}<\min(a;b-a;1-b)$. Ясно что существуют такие натуральные числа $i>j$, что $|\{i\alpha\}-\{j\alpha\}|<\dfrac{1}{m}$ (достаточно разбить отрезок $[0,1]$ на $m+1$ равных частей и воспользоваться принципом Дирихле).

Следовательно, $|(i-j)\,\alpha-[i\alpha]+[j\alpha]|<\dfrac{1}{m}$, откуда $\{(i-j)\,\alpha\}<$ $<\dfrac{1}{m}$ или $\{(i-j)\,\alpha\}>1-\dfrac{1}{m}$.

Пусть $\{(i-j)\,\alpha\}<\dfrac{1}{m}$, $(i-j)\,\alpha=x+k$, $k\in Z$, $\alpha=\{(i-j)\,\alpha\}$.

Рассмотрим числа $x, 2x, 3x, \ldots$ Одно из этих чисел принадлежит области (a,b), пусть $a<lx<b$, $l\in\mathrm{N}$.

Имеем $l\,(i-j)\,\alpha=lx+kl$, откуда $\{l\,(i-j)\,\alpha\}=lx\in(a,b)$.

Пусть $\{(i-j)\,\alpha\}>1-\dfrac{1}{m}$, $(i-j)\,\alpha=x+k$, $k\in Z$, $x=\{(i-j)\,\alpha\}$. Имеем $1-x<\dfrac{1}{m}$.

Рассмотрим числа $1-x$, $2(1-x)$, $\ldots$ Одно из этих чисел принадлежит области $(1-b,1-a)$. Пусть

$$1-b<l(1-x)<1-a,\quad l(i-j)\alpha=lx+lk=-l(1-x)+l+lk,$$

откуда

$$l(k+1)+a-1<l(i-j)\alpha<l(k+1)+b-1,$$

или $a<\{l\,(i-j)\}<b$.

14.26. а) Имеем $\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)(M - x_i) \geqslant 0$; следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant -nmM.$$

б) Заметим, что $M \geqslant 0 \geqslant m$; следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M(x_i - m)(M^3 - x_i^3) - m(x_i^3 - m^3)(M - x_i)\right) \geqslant 0,$$

откуда $(M - m)\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \leqslant -n(M^4 m - m^4 M)$. Следовательно, когда $M \neq m$, имеем $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \leqslant -mMn(m^2 + M^2 + mM)$. Когда $m = M = 0$, имеем $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0 = -mMn(m^2 + M^2 + mM)$.

14.27. Имеем

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^m - x^{2m} - y^{2m} =\\ &\quad = \frac{C_m^1(x^{2m-2}y^2 + x^2y^{2m-2}) + \ldots + C_m^{m-1}(x^2y^{2m-2} + y^2x^{2m-2})}{2} \geqslant\\ &\quad\quad \geqslant C_m^1 x^m y^m + C_m^2 x^m y^m + \ldots + C_m^{m-1} x^m y^m = (2^m - 2)x^m y^m.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенствами

$$(x^2)^k (y^2)^{m-k} + (x^2)^{m-k}(y^2)^k \geqslant 2\sqrt{x^{2m}\cdot y^{2m}} \geqslant 2x^m y^m,$$
$$k = 1, \ldots, m-1.$$

Таким образом, $(x^2+y^2)^m - x^{2m} - y^{2m} \geqslant (2^m - 2)x^m y^m$, или

$$(x^2+y^2)^m \geqslant (x^m - y^m)^2 + 2^m x^m y^m.$$

14.28. В случае $\alpha, \beta, \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}(\sin 2\gamma + \sin 2\beta) \geqslant \sqrt{\sin 2\gamma \sin 2\beta},$$

откуда $\cos(\beta - \gamma) \geqslant \dfrac{\sqrt{\sin 2\gamma \sin 2\beta}}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha) \geqslant\\ &\quad \geqslant \frac{\sqrt{\sin 2\alpha\sin 2\beta}}{\sin\gamma}\,\frac{\sqrt{\sin 2\gamma\sin 2\beta}}{\sin\alpha}\,\frac{\sqrt{\sin 2\alpha\sin 2\gamma}}{\sin\beta} = 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha \leqslant \beta < \frac{\pi}{2} < \gamma$. Если $\gamma \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha$ или $\gamma \geqslant \frac{\pi}{2} + \beta$, то

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha) \geqslant 0 > 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Если же $\frac{\pi}{2} + \alpha < \gamma < \frac{\pi}{2} + \beta$, то

$$0 < -\cos(\gamma-\alpha) < -\cos\gamma,$$

$$0 < \cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\beta) < \cos(\beta-\alpha) < \\ < 4\cos(\beta-\alpha) + 4\cos(\alpha+\beta) = 8\cos\alpha\cos\beta,$$

следовательно,

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha) > 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

14.29. Рассмотрим два случая:

а) когда $\sin\frac{x}{2} = 0$, имеем $x = 2\pi n$, $n \in Z$ и

$$\left|\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right| = 0 < 3.$$

б) когда $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, существует такое натуральное число m, что

$$\frac{1}{m+1} < \left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{m}.$$

При $n \leqslant m$ имеем

$$\left|\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant |\sin x| + \frac{|\sin 2x|}{2} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{n} \leqslant \\ \leqslant \underbrace{|\sin x| + |\sin x| + \ldots + |\sin x|}_{n \text{ членов}} \leqslant m|\sin x| \leqslant 2m\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant 2 \quad (14.3)$$

(см. упр. 1.13 и 7.4, а)).

Теперь оценим выражение $\left|\frac{\sin(m+1)x}{m+1} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right|$ при $n > m$. Согласно упр. 14.10 имеем

$$\frac{\sin(m+1)x}{m+1} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} = \sin(m+1)x\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \\ + (\sin(m+1)x + \sin(m+2)x)\left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \ldots \\ \ldots + (\sin(m+1)x + \ldots + \sin(n-1)x)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \\ + (\sin(m+1)x + \ldots + \sin nx)\,\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\sin(m+1)x}{m+1}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant |\sin(m+1)x|\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+$$
$$+|\sin(m+1)x+\sin(m+2)x|\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+|\sin(m+1)x+\ldots+\sin(n-1)x|\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+|\sin(m+1)x+\ldots+\sin nx|\frac{1}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{(m+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}<1,$$

значит,

$$\left|\frac{\sin(m+1)x}{m+1}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right|<1. \qquad (14.4)$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$|\sin kx+\sin(k+1)x+\ldots+\sin px| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Докажем его. Действительно,

$$|\sin kx+\sin(k+1)x+\ldots+\sin px| = \frac{\left|2\sin\frac{x}{2}\sin kx+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\sin px\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=$$
$$=\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\right.$$
$$\left.-\cos\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x+\ldots+\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x\right|=$$
$$=\frac{\left|\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Теперь, используя неравенства (14.3) и (14.4), нетрудно доказать, что

$$\left|\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right|<3.$$

14.30. Требуется доказать, что

$$A=\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_n+a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_n+a_1)} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n. \qquad (14.5)$$

Докажем (14.5) методом математической индукции.

а) При $n=3$

$$a_1+a_2+a_3=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_3+a_1}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{a_2+a_3}{2}\,\frac{a_3+a_1}{2}},$$

следовательно,

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_1)(a_3+a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3^3\dfrac{(a_1+a_2)}{2}\dfrac{(a_2+a_3)}{2}\dfrac{(a_3+a_1)}{2}}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)}=\left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

б) Пусть $n\geqslant 4$ и неравенство (14.5) верно для $n-1$ чисел. Сначала докажем неравенство (14.5) в случае, когда $a_1=a_2$ или $a_{n-1}=a_n$. Когда $a_1=a_2$, имеем

$$A=\frac{(2a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_{n-1}+a_n+a_2)(a_n+2a_2)}{2a_2(a_2+a_3)\ldots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_2)}=$$
$$=\frac{(2a_2+a_3)(a_n+2a_2)}{2a_2(a_n+a_2+a_3)}\,\frac{(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_{n-1}+a_n+a_2)(a_n+a_2+a_3)}{(a_2+a_3)\ldots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_2)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(2a_2+a_3)(a_n+2a_2)}{2a_2(a_n+a_2+a_3)}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\geqslant\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n},$$

поскольку неравенство $(2a_2+a_3)(a_n+2a_2)\geqslant 3a_2(a_n+a_2+a_3)$ эквивалентно неравенству $(a_2-a_3)(a_2-a_n)\geqslant 0$.

Доказательство в случае $a_{n-1}=a_n$ аналогично.

Теперь докажем, что если $a_1<a_2$ и $a_{n-1}<a_n$, и если последовательность чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ заменить числами $a_1'=a_1+x$, $a_2,\ldots,a_{n-1}$, $a_n-x=a_n'$, где $0\leqslant x\leqslant\min(a_2-a_1,a_n-a_{n-1})$, то величина A от этого не возрастет, т. е.

$$A\geqslant\frac{1}{(a_1+x+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{n-1}+a_n-x)(a_n+a_1)}\times$$
$$\times(a_1+a_2+a_3+x)(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-x)\times$$
$$\times(a_{n-1}+a_n+a_1)(a_n+a_1+a_2),$$

или

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}{(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3+x)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-x)}{(a_1+x+a_2)(a_{n-1}+a_n-x)}.\qquad(14.6)$$

Заметим, что последнее неравенство можно записать в виде

$$ax^2+bx+c\leqslant 0,$$

где $a = \dfrac{(a_1+a_2+a_3)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}{(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n)} - 1 > 0$, $c = 0$, следовательно, для доказательства (14.6) достаточно доказать его для значений $x = 0$ и $x = a_4 - a_1$ при $n = 4$, $x = a_5 + a_4 - a_2 - a_1$ при $n = 5$, а при $n \geqslant 6$ $x = a_2 - a_1$ (так как $\min(a_2 - a_1, a_n - a_{n-1}) \leqslant a_2 - a_1 \leqslant a_4 - a_1 \leqslant a_4 - a_1 + a_5 - a_2$).

В случае $x = 0$ доказательство неравенства (14.6) очевидно.

В случае $n = 4$, $x = a_4 - a_1$ необходимо доказать, что

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)} \geqslant \frac{(a_2+a_3+a_4)(a_2+a_3+a_1)}{(a_2+a_4)(a_1+a_3)},$$

или $(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) \geqslant 0$.

В случае $n = 5$, $x = a_5 + a_4 - a_2 - a_1$ доказательство неравенства (14.6) очевидно.

При $n \geqslant 6$, $x = a_2 - a_1$ необходимо доказать, что $ax + b \leqslant 0$ т. е.

$$\left(\frac{(a_1+a_2+a_3)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}{(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n)} - 1\right)(a_2 - a_1) + \\ + \Bigg(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} - a_1 - a_2 - a_3 - \\ - \frac{(a_1+a_2+a_3)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}{a_1+a_2} + \\ + \frac{(a_1+a_2+a_3)(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}{a_{n-1}+a_n}\Bigg) \leqslant 0,$$

или

$$\frac{(a_3a_{n-2} + a_3(a_{n-1}+a_n) + a_{n-2}(a_1+a_2))(a_2 - a_1)}{(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n)} + \Bigg(a_{n-2} - a_3 - \\ - \frac{(a_{n-1}+a_n-a_1-a_2)(a_3a_{n-2} + a_3(a_{n-1}+a_n) + a_{n-2}(a_1+a_2))}{(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n)}\Bigg) \leqslant 0,$$

$$(a_3a_{n-2} + a_3(a_{n-1}+a_n) + a_{n-2}(a_1+a_2))(2a_2 - a_n - a_{n-1}) + \\ + (a_{n-2} - a_3)(a_1+a_2)(a_{n-1}+a_n) \leqslant 0,$$

$$2a_2a_{n-2}(a_1+a_2+a_3) + \\ + (a_{n-1}+a_n)(a_2a_3 - a_3a_{n-2} - a_3a_{n-1} - a_3a_n - a_3a_1) \leqslant 0,$$

$$2a_2a_{n-2}(a_1+a_2+a_3) \leqslant (a_3a_{n-1} + a_3a_n)(a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_1 - a_2);$$

последнее неравенство справедливо, так как

$$2a_2a_{n-2} \leqslant a_3a_{n-2} + a_3a_{n-2} \leqslant a_3a_{n-1} + a_3a_n,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 \leqslant a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_1 - a_2.$$

Взяв $x = \min(a_2 - a_1, a_n - a_{n-1})$, получим для чисел $a_1', a_2, \ldots \ldots, a_{n-1}, a_n'$ случай $a_1' = a_2$ или $a_{n-1} = a_n'$, причем $a_1' \leqslant$

$\leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} \leqslant a'_n$, следовательно,

$$A \geqslant \frac{(a'_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3 + a_4)\ldots(a'_n + a_1 + a_2)}{(a'_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots(a'_n + a_1)} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

и, таким образом, заданное неравенство доказано.

14.31. а) Заметим, что $yz < 1$, $xz < 1$, $xy < 1$, следовательно,

$$\frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \geqslant x + y + z \geqslant x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

значит, $\dfrac{x}{1-yz}+\dfrac{y}{1-zx}+\dfrac{z}{1-xy} \geqslant 1$. Заметим также, что $yz \leqslant \dfrac{y^2+z^2}{2}$, $xz \leqslant \dfrac{z^2+x^2}{2}$, $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, следовательно,

$$\frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leqslant \frac{x}{1-\dfrac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y}{1-\dfrac{z^2+x^2}{2}} + \frac{z}{1-\dfrac{x^2+y^2}{2}} =$$
$$= \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2}.$$

Кроме того, заметим, что

$$\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+y^2}\right)\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right) = -\frac{2(x-y)^2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \leqslant 0,$$

следовательно, согласно неравенству (8.5′) получим

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \leqslant \frac{6(x+y+z)}{3+x^2+y^2+z^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, $\dfrac{x}{1-yz}+\dfrac{y}{1-zx}+\dfrac{z}{1-xy} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (см. также упр. 5.17).

б) Имеем

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} = \frac{x^2}{x+xyz} + \frac{y^2}{y+xyz} + \frac{z^2}{z+xyz}, \qquad xyz \neq 0.$$

Согласно неравенству (8.4)

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+3xyz} =$$
$$= \frac{(1+xy+yz+zx)+xy+yz+zx}{x+y+z+3xyz} =$$
$$= \frac{x+y+z+(1-x)(1-y)(1-z)+xyz+xy+yz+zx}{x+y+z+3xyz} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{x+y+z+xyz+xy+yz+zx}{x+y+z+3xyz} > 1,$$

следовательно, $\dfrac{x}{1+yz}+\dfrac{y}{1+zx}+\dfrac{z}{1+xy}>1.$

Если $xyz=0$, например, $x=0$, то

$$y^2+z^2=1, \qquad \frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}=y+z\geqslant y^2+z^2=1.$$

Докажем, что если $x,y,z\geqslant 0$ и $x^2+y^2+z^2=1$, то

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leqslant\sqrt{2}.$$

Заметим, что если $a\geqslant 0$, то $\dfrac{1}{1+a}\leqslant 1-a+a^2$, следовательно,

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leqslant x(1-yz+y^2z^2)+y(1-xz+x^2z^2)+$$
$$+x(1-xy+x^2y^2)=x+y+z-3xyz+xyz(yz+xz+xy).$$

Кроме того, $xy+yz+zx\leqslant x^2+y^2+z^2$, следовательно,

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leqslant x+y+z-2xyz.$$

Докажем, что $x+y+z-2xyz\leqslant\sqrt{2}$, где $x,\,y,\,z\geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Действительно, пусть $\max(x,y,z)=z$. Тогда $3z^2\geqslant x^2+y^2+z^2=1$, следовательно, $2z^2+2\sqrt{2}z-1\geqslant 2z^2+2\sqrt{2}z^2-1>3z^2-1\geqslant 0$, поэтому из неравенства

$$4z^4-8z^2+4\sqrt{2}z-1=(\sqrt{2}z-1)^2(2z^2+2\sqrt{2}z-1)\geqslant 0$$

следует, что

$$\left(\sqrt{z}(x+y)-\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2+\frac{4z^4-8z^2+4\sqrt{2}z-1}{4z}\geqslant 0,$$

или

$$z(x+y)^2-(x+y)+z^3-2z+\sqrt{2}\geqslant 0,$$

$$x+y+z-((x+y)^2+z^2-1)\,z\leqslant\sqrt{2}, \qquad x+y+z-2xyz\leqslant\sqrt{2}.$$

14.32. Докажем, что если неравенство (14.1) выполняется при всех положительных a,b,c, то $\lambda\geqslant 8$ или $\lambda=0$.

Действительно, если $\lambda\neq 0$, то для $a=1$, $b=c=\dfrac{1}{n}$, из (14.1) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda/n^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+n\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{1+n\lambda}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Теперь при $n\to+\infty$ получаем $1\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$, следовательно, $\lambda\geqslant 8$ $\Bigl($если $\lambda<0$, то выражение $\sqrt{1+n\lambda}$ не определено для $n>-\dfrac{1}{\lambda}\Bigr)$.

Докажем, что для $\lambda \geqslant 8$ и $a, b, c > 0$ неравенство (14.1) справедливо.

Л е м м а 1. *Если* $x > 0$, $y > 0$ *и* $xy \leqslant 9$, *то* $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geqslant 1$.

Действительно, имеем

$$(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})^2 = 2 + x + y + 2\sqrt{(1+x)(1+y)} = 2 + x + y +$$
$$+ 2\sqrt{(1+\sqrt{xy})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \geqslant 2 + x + y + 2(1 + \sqrt{xy}) =$$
$$= (1+x)(1+y) + 4 - (\sqrt{xy} - 1)^2 \geqslant (1+x)(1+y),$$

таким образом, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$.

Л е м м а 2. *Если* $x > 0$, $y > 0$ *и* $xy \geqslant 9$, *то*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}.$$

Требуется доказать, что

$$(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})^2 (1 + \sqrt{xy}) \geqslant 4(1+x)(1+y).$$

Имеем $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})^2 (1+\sqrt{xy}) \geqslant (4 + x + y + 2\sqrt{xy})(1 + \sqrt{xy})$ (см. доказательство леммы 1). Теперь докажем неравенство

$$(4 + x + y + 2\sqrt{xy})(1 + \sqrt{xy}) \geqslant 4(1+x)(1+y),$$

или, что то же самое, $(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, которое очевидно.

Введем следующие обозначения: $x = \frac{\lambda bc}{a^2}$, $y = \frac{\lambda ac}{b^2}$, $z = \frac{\lambda ab}{c^2}$; тогда $x, y, z > 0$, $xyz = \lambda^3$. Докажем, что для $\lambda \geqslant 8$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Действительно, пусть $\max(x, y, z) = z$; тогда $z \geqslant \lambda$. Если $xy \leqslant 9$, то согласно лемме 1 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} > \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geqslant 1 \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Если же $xy \geqslant 9$, то согласно лемме 2 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{z\lambda}}}$$

(так как $z\lambda \geqslant \lambda^2 \geqslant 64 > 9$). Складывая полученные неравенства, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \geqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z\lambda}}}\right).$$

Теперь, так как $\sqrt{xy} \geqslant 3$ и $\sqrt{z\lambda} \geqslant \lambda$, то $\sqrt{xy}\sqrt{z\lambda} \geqslant 3\lambda \geqslant 24 > 9$, следовательно, снова согласно лемме 2

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z\lambda}}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt[4]{xyz\lambda}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{1+\lambda}},$$

и неравенство (14.1) доказано.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказывать, что если $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n > 0$, $n \geqslant 2$, то

$$\sqrt{\frac{a_1^{n-1}}{a_1^{n-1} + (n^2-1)a_2 a_3 \ldots a_n}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n^{n-1}}{a_n^{n-1} + (n^2-1)a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}} \geqslant 1.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства 1–17.

1. $\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{3x^2-4x+2} \geqslant \dfrac{\sqrt{51}}{3}$.

2. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-1\right)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$ и

$$\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leqslant 2-\sqrt{2},$$

где $\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{2}$, $x \in [0,1]$.

3. $\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2} + \ldots$

$$\ldots + \sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2} \geqslant \frac{n\sqrt{2}}{2},$$

где $n \geqslant 2$.

4. $\sqrt{2} + \sqrt{4-2\sqrt{2}} + \ldots + \sqrt{2n-2\sqrt{(n-1)n}} \geqslant \sqrt{n(n+1)}$, где $n \in \mathrm{N}$.

5. $\dfrac{(a-b)^2}{8a} \leqslant \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{(a-b)^2}{8b}$, где $a \geqslant b > 0$.

6. $0 < \sqrt{4n+2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < \dfrac{1}{16\sqrt{n^3}}$, где $n \in \mathrm{N}$.

7. а) $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}\geqslant\sqrt{x^2+xz+z^2}$;

б) $c\sqrt{a^2+b^2-ab}+a\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant b\sqrt{a^2+c^2+ac}$, где a, b, $c>0$.

8. $\sqrt{1-\cos(x_3-x_2)}+\sqrt{1-\cos(x_2-x_1)}\geqslant\sqrt{1-\cos(x_3-x_1)}$.

9. $9<\int\limits_0^3\sqrt[4]{x^4+1}dx+\int\limits_0^3\sqrt[4]{x^4-1}dx<9{,}0001$.

10. $$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+\ldots+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\geqslant \geqslant\frac{1}{3}(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

где $x_1,\ldots,x_n>0$, $n\geqslant 3$.

11. $$\frac{x_1^7}{x_1^4+2x_1^3x_2+2x_1x_3^3+x_2^4}+\frac{x_2^7}{x_2^4+2x_2^3x_3+2x_2x_3^3+x_3^4}+\ldots \ldots+\frac{x_n^7}{x_n^4+2x_n^3x_1+2x_nx_1^3+x_1^4}\geqslant\frac{1}{6}\left(x_1^3+x_2^3+\cdot+x_n^3\right),$$

где $n\geqslant 3$, $x_1,\ldots,x_n>0$.

12. $3^n+4^n+\ldots+(n+1)^n+(n+2)^n<(n+3)^n$, где $n\geqslant 6$ и $n\in\mathrm{N}$.

13. $\dfrac{1}{1983}<\ln\dfrac{1983}{1982}<\dfrac{1}{1982}$.

14. $\operatorname{tg}x\geqslant x^3$, где $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. $\sum\limits_{i=1}^n\operatorname{tg}\alpha_i\geqslant(n-1)\sum\limits_{i=1}^n\operatorname{ctg}\alpha_i$, где $n\geqslant 3$, $0\leqslant\alpha_i<\dfrac{\pi}{2}$, $i=1, 2,\ldots,n$ и $\sum\limits_{i=1}^n\cos^2\alpha_i=1$.

16. $a^3+b^3+c^3+6abc\geqslant\dfrac{1}{4}(a+b+c)^3$, где $a,b,c>0$.

17. $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, где $x,y,z\geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

18. Сравнить числа $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}+\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

19. Докажите, что если $a+b+c+d=0$ и $a+b^{1987}+b^{1987}+ +c^{1987}+d^{1987}=0$, то $a^3+b^3+c^3+d^3=0$.

20. Докажите, что если неравенство

$$\alpha\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+(1-\alpha)\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$$

справедливо для любых положительных чисел a, b, то $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

21. Докажите, что если $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то

$$|1-(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)|<2\varepsilon.$$

22. Функция f определена на множестве Q и $f(0)f(1)<0$. Докажите, что существуют такие рациональные числа r_1 и r_2, что

$$f(r_1)-f(r_2)>(r_1-r_2)^2.$$

23. Найдите наибольшее значение выражения $|a-b|\,|b-c|\,|a-c|$ при условии $a, b, c\geqslant 0$ и $a+b+c\leqslant 1$.

24. Докажите, что если α, β, γ — углы некоторого треугольника, а a, b, c — его стороны, то:

а) $0<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $0<\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\leqslant 3\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}$;

в) $0<\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$;

г) $2<\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{8}$;

е) $0<\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$;

ж) $\frac{1}{3}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}<\frac{1}{2}$;

з) $\frac{1}{4}\leqslant\frac{ab+bc+ac}{(a+b+c)^2}\leqslant\frac{1}{3}$;

и) $\frac{1}{4}\leqslant\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3}\leqslant\frac{8}{27}$.

25. Докажите для углов остроугольного треугольника α, β, γ следующие неравенства:

а) $2<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $2 < \sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leqslant 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1/4}$;

в) $\dfrac{3}{4} < \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) < 1$;

г) $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$;

д) $2 < \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) \leqslant \dfrac{9}{4}$;

е) $\dfrac{1}{2} < \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

ж) $3^{(m+2)/2} \leqslant \operatorname{tg}^m\alpha + \operatorname{tg}^m\beta + \operatorname{tg}^m\gamma \geqslant 1$, где $m \geqslant 1$.

26. Докажите для тупоугольного треугольника с углами α, β, γ и сторонами a, b, c следующие неравенства:

а) $0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 1 + \sqrt{2}$;

б) $0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \dfrac{1}{2}$;

в) $0 < \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) \leqslant \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$;

г) $\dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \geqslant 2$;

д) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \leqslant \dfrac{3}{8}$;

е) $\dfrac{5}{16} < \dfrac{ab+bc+ac}{(a+b+c)^2} \leqslant \dfrac{1}{3}$;

ж) $\dfrac{9}{32} < \dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3} \leqslant \dfrac{8}{27}$.

27. Докажите, что если $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant b_n$, то

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n) \leqslant (a_1+b_{i_1})(a_2+b_{i_2})\ldots(a_n+b_{i_n}) \leqslant \\ \leqslant (a_1+b_n)(a_2+b_{n-1})\ldots(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_1),$$

где числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$ являются некоторым перераспределением чисел $1, 2, \ldots, n$.

28. Для чисел a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выполняются условия предыдущего упражнения и g — неубывающая выпуклая функция (см. § 11). Докажите, что

$$g\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + g\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \ldots + g\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \leqslant g\left(\frac{b_1}{a_{i_1}}\right) + g\left(\frac{b_2}{a_{i_2}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + g\left(\frac{b_n}{a_{i_n}}\right) \leqslant g\left(\frac{b_1}{a_n}\right) + g\left(\frac{b_2}{a_{n-1}}\right) + \ldots + g\left(\frac{b_{n-1}}{a_2}\right) + g\left(\frac{b_n}{a_1}\right).$$

29. Пусть g — выпуклая функция на отрезке $[0, a_1]$ и $g(0) \leqslant 0$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} g(a_i) \geqslant g\left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} a_i\right),$$

где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m > 0$.

30. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, то

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^n + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^n + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^n \geqslant \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}.$$

31. Пусть многочлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет следующему условию: $0 \leqslant p(-1) \leqslant 1$, $0 \leqslant p(0) \leqslant 1$, $0 \leqslant p(1) \leqslant 1$. Докажите, что для любого $x \in [0, 1]$ имеет место неравенство $p(x) \leqslant \frac{9}{8}$.

32. Известно, что для трехчлена $p(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $x \in [0, 1]$ имеет место неравенство $|p(x)| \leqslant 1$. Докажите, что $|b| \leqslant 8$.

33. Известно, что для трехчлена $p(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ имеет место неравенство $|p(x)| \leqslant 1$. Докажите, что на том же отрезке справедливо неравенство $|p'(x)| \leqslant 4$.

Замечание. Для любого многочлена $p(x)$ справедливо неравенство

$$|p'(x)| \leqslant \frac{2n^2}{b-a} \max_{[a,b]} |p(x)|,$$

где $x \in [a, b]$ и n — степень $p(x)$.

34. Степень многочлена $p(x)$ не превышает $2n$. Известно, что для любого целого числа $k \in [-n, n]$ $|p(k)| \leqslant 1$. Докажите, что для любого числа $x \in [-n, n]$ справедливо неравенство $|p(x)| \leqslant 2^{2n}$.

35. Пусть $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ — целые числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел $|p(x_0)|, |p(x_1), \ldots, |p(x_n)|$ не меньше $\frac{n!}{2^n}$, где $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$.

36. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ заданы отличные друг от друга числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, $k \geqslant 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{|x_1 - x_2||x_1 - x_3| \ldots |x_1 - x_k|} + \frac{1}{|x_2 - x_1||x_2 - x_3| \ldots |x_2 - x_k|} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{|x_k - x_1||x_k - x_2| \ldots |x_k - x_{k-1}|} \geqslant 2^{k-2}.$$

37. Докажите, что если $a, b, c > 0$, то

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leqslant 1.$$

38. Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и для всех x на отрезке $[-1, 1]$ имеет место неравенство $|p(x)| \leqslant 1$. Докажите, что $|a| + |b| + |c| + |d| \leqslant 7$.

39. а) $x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-x)(y-z) + z^\lambda(z-x)(z-y) \geqslant 0$, где $x, y, z > 0$;

б) $g(x)(f(x)-f(y))(f(x)-f(z)) + g(y)(f(y)-f(x))(f(y)-f(z)) + g(z)(f(z)-f(x))(f(z)-f(y)) \geqslant 0$, где $E(g) \subset (0; +\infty)$ и функции f и g монотонны.

40. Полный граф имеет n вершин, каждое из его ребер окрашено одним из трех цветов. Докажите, что существует одноцветный связный подграф, имеющий по крайней мере $\frac{n}{2}$ вершин.

41. Докажите неравенство

$$\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n} \leqslant \sqrt{a_1 + C(n)}\sqrt{a_2 + C(n)} \ldots \sqrt{a_n + C(n)},$$

где $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, $C(n) = \frac{n-1}{n^{(n-2)/(n-1)}}$.

42. Докажите неравенство

$$0 \leqslant \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} < 2\sqrt{2},$$

где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Указание. Если $x \neq 0$, то существует натуральное число m такое, что

$$\frac{\sqrt{2}}{2(m+1)} < \sin\frac{x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2m}.$$

43. Пусть $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. Докажите, что f — постоянная, если:

а) для любых действительных x и y имеет место неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$, где $C > 0$, $\alpha > 1$;

б) для любых чисел a, b, c, d, составляющих арифметическую прогрессию, имеет место неравенство $|f(a) - f(d)| \geqslant A|f(c) - f(b)|$, где $A > 3$.

§ 15. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Внутри угла задана точка M. Проведите через точку M прямую так, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой прямой и сторонами угла, была наименьшей.

15.2. На сторонах BC, AB и AC треугольника ABC даны соответственно точки D, E и F. При этом около четырехугольника $AFDE$ можно описать окружность. Докажите, что $4\,\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leqslant \frac{EF^2}{AD^2}$.

15.3. Докажите, что:

а) если длины трех биссектрис треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) если длины трех биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.4. Докажите неравенство $ab+bc+ac \geqslant 4\sqrt{3}S$, где S — площадь треугольника со сторонами a, b, c.

15.5. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите, что $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$.

15.6. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leqslant \frac{1}{2}$.

15.7. Докажите неравенство

$$\frac{A_1A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{A_2A_3}{MA_2 \cdot MA_3} + \ldots + \frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geqslant \frac{A_1A_n}{MA_1 \cdot MA_n},$$

где $M, A_1, \ldots, A_n$ — отличные друг от друга точки и $n \geqslant 3$. Когда имеет место равенство?

15.8. Докажите неравенство

$$\sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 2\angle AOB} + \\ + \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 2\angle BOC} \geqslant \\ \geqslant \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 2\angle AOC},$$

где O, A, B, C — отличные друг от друга точки.

15.9. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ заданы соответственно точки U и V. Пусть прямые DU и AV пересекаются в точке P, а прямые CU и BV — в точке Q. Докажите, что:

а) $PQ \geqslant \frac{1}{2}AB$; б) $S_{UPVQ} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

15.10. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны параллельны ($AB||DE$, $BC||EF$, $CD||FA$). Докажите неравенство $R_A+R_C+R_E \geqslant P$, где R_A, R_C, R_E — радиусы окружностей, описанных около треугольников FAB, BCD и DEF соответственно, а P — полупериметр шестиугольника $ABCDEF$.

15.11. Внутри квадрата со сторонами равными 1 заданы квадраты со сторонами a и b, не имеющие общих точек. Докажите, что $a+b<1$.

15.12. Правильный n-угольник со стороной b находится внутри n-угольника со стороной a и не содержит центр окружности, описанной около последнего. Докажите, что $b < \dfrac{a}{2\cos^2 \frac{\pi}{2n}}$.

15.13. Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E, F имеет место неравенство

$$2\left(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + EF^2 + FA^2\right) \geqslant AD^2 + BE^2 + CF^2.$$

15.14. Даны положительные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть M_0 — такая точка, что $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{e}_i = \vec{0}$, где $\vec{e}_i = \dfrac{\overrightarrow{M_0A_i}}{M_0A_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} m_i MA_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i M_0A_i,$$

где M — произвольная точка.

15.15. Даны положительные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем $\left|\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i\vec{e}_i\right| \leqslant m_n$, где $\vec{e}_i = \dfrac{\overrightarrow{A_nA_i}}{A_nA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Докажите неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i MA_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i A_nA_i$, где M — произвольная точка.

15.16. Даны положительные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и выпуклые многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, причем многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ вписан в многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ ($B_1 \in A_1A_2$, $B_2 \in \in A_2A_3, \ldots, B_n \in A_nA_1$) и

$$\overrightarrow{A_1A_2}(m_n\vec{e}_n - m_1\vec{e}_1) = \overrightarrow{A_2A_3}(m_1\vec{e}_1 - m_2\vec{e}_2) = \ldots$$
$$\ldots = \overrightarrow{A_nA_1}(m_{n-1}\vec{e}_{n-1} - m_n\vec{e}_n) = 0,$$

где $\vec{e}_i = \dfrac{\overrightarrow{B_iB_{i+1}}}{B_iB_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $B_{n+1} \equiv B_1$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} m_iC_iC_{i+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_iB_iB_{i+1},$$

где $C_1 \in A_1A_2$, $C_2 \in A_2A_3, \ldots, C_n \in A_nA_1$ и $C_{n+1} \equiv C_1$.

15.17. Внутри треугольника ABC дана точка M, а на сторонах AB, BC и CA — точки P, Q и R соответственно. При этом

$$\angle PMA,\ \angle PMB,\ \angle QMB,\ \angle QMC,\ \angle RMA,\ \angle RMC < \frac{\pi}{2}.$$

Докажите неравенство

$$MA + MB + MC \geqslant 2\sqrt{MA\cdot MB\cdot\cos\angle AMP\cdot\cos\angle BMP} +$$
$$+ 2\sqrt{MB\cdot MC\cdot\cos\angle BMQ\cdot\cos\angle CMQ} +$$
$$+ 2\sqrt{MA\cdot MC\cdot\cos\angle AMR\cdot\cos\angle CMR}.$$

15.18. Внутри выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ дана точка M. Обозначим расстояние точки M от прямых A_iA_{i+1} через d_i, $A_{n+1} = A_1$, $MA_i = R_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Докажите неравенство $\cos^n \dfrac{\pi}{n} R_1R_2\ldots R_n \geqslant d_1d_2\ldots d_n$.

15.19. Внутри куба с единичным ребром даны три точки. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не больше $\sqrt{2}$.

15.20. Внутри куба с единичным ребром задана пирамида $ABCD$. Докажите неравенство $AB\cdot CD\cdot d \leqslant 2$, где d — расстояние между прямыми AB и CD.

15.21. Треугольная пирамида находится внутри параллелепипеда. Докажите, что объем пирамиды не больше $\dfrac{1}{3}$ объема параллелепипеда.

15.22. Куб с ребром a находится внутри куба с единичным ребром. При этом он не содержит центр единичного куба. Докажите, что $a < \dfrac{1}{2}$.

15.23. На плоскости даны два произвольных треугольника. Пусть P — сумма их периметров, а Q — сумма расстояний вершин одного треугольника от вершин другого. Докажите, что $P \leqslant Q$.

15.24. Внутри квадрата с единичной стороной даны 1998 взаимно не пересекающихся кругов. Известно, что сумма их площадей не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что существует такая прямая, что сумма длин хорд, образовавшихся при пересечении этой прямой с кругами, не меньше $\frac{1}{2}$.

15.25. Выпуклый многоугольник M находится внутри треугольника ABC. Докажите, что какую-нибудь из сторон многоугольника можно положить на одну из сторон треугольника так, что многоугольник M снова будет находиться внутри треугольника ABC.

РЕШЕНИЯ

15.1. Пусть прямая, проведенная из точки M, пересекает стороны треугольника в точках A и B. Проведем из точки M прямые, параллельные сторонам угла (рис. 1): $MC \,||\, OB$ и $MD \,||\, OA$.

Имеем $\Delta ACM \sim \Delta AOB$ и $\Delta MDB \sim \Delta AOB$; следовательно,

$$\sqrt{\frac{S_{AMC}}{S_{AOB}}} + \sqrt{\frac{S_{MBD}}{S_{AOB}}} = \frac{CM + BD}{OB} = 1,$$

откуда нетрудно получить, что

$$\beta\alpha S_{OCMD} = 2\sqrt{S_{AMC}S_{BMD}} \leqslant S_{AMC} + S_{BMD},$$

или $S_{AOB} \geqslant 2S_{OCMD}$. Следовательно, площадь треугольника AOB будет наименьшей, когда $S_{AMC} = S_{BMD}$, т. е. $AC = MD = OC$.

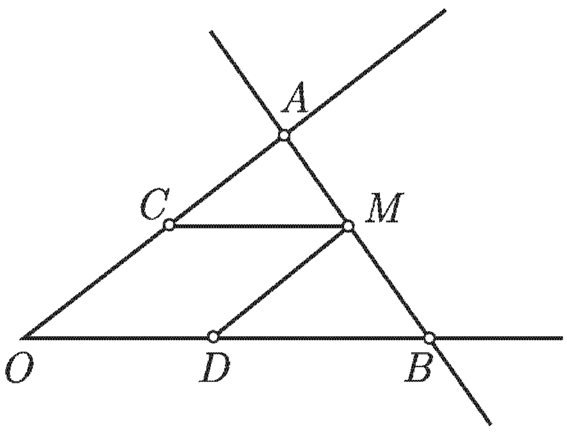

Рис. 1

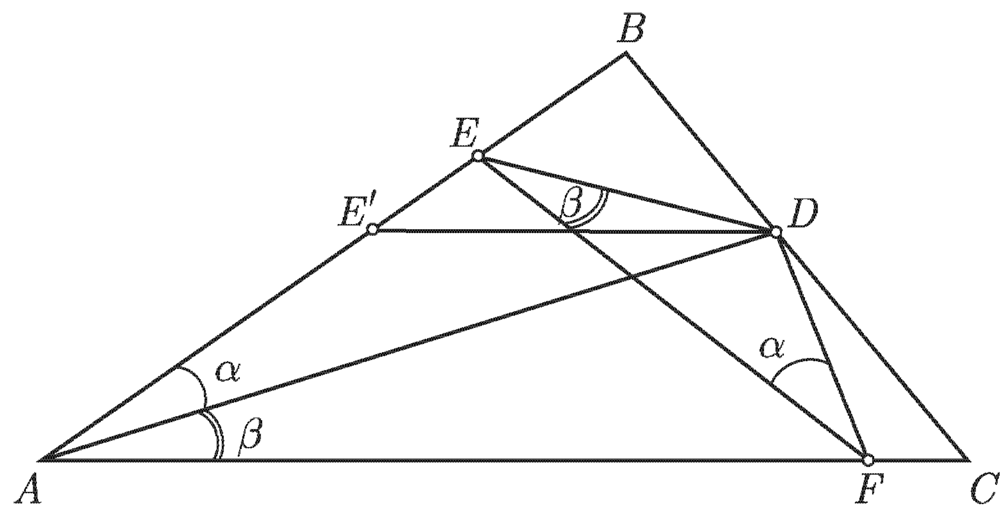

Рис. 2

15.2. На стороне AB выберем точку E' так, что $DE' \,||\, AC$ (рис. 2). При решении упр. 15.1 мы доказали, что

$$S_{ABC} \geqslant 4S_{AE'D} = 4\frac{AD^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} = 4AD^2\frac{S_{EDF}}{EF^2},$$

откуда $4\,\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leqslant \dfrac{EF^2}{AD^2}$.

15.3. а) Рассмотрим два случая.

1. Длина какой-нибудь стороны треугольника ABC меньше $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. В таком случае, если $a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, то

$$S = \frac{ah_a}{2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Длина каждой стороны треугольника ABC не меньше $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Предположим, что величина угла A этого треугольника наибольшая, тогда $\angle A \geqslant 60^\circ$. Проведем из вершины A прямую l так, чтобы она образовала со стороной AB угол 60° (рис. 3). В таком случае

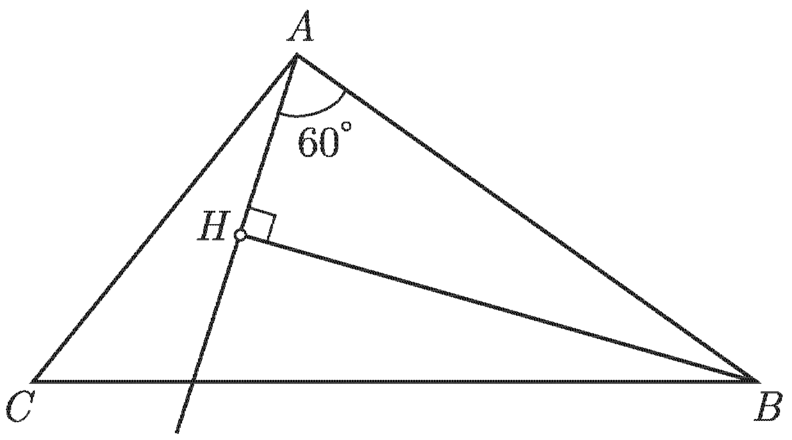

Рис. 3

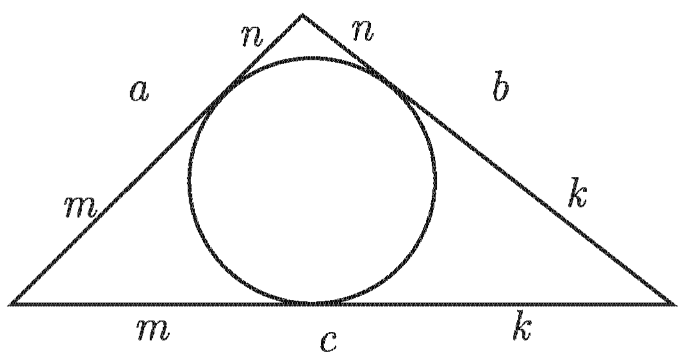

Рис. 4

биссектриса угла B не меньше BH $(BH \perp l)$ и $BH = AB\sin 60^\circ \geqslant 1$, что невозможно.

б) Пусть AD — биссектриса угла A и $A \geqslant 60^\circ$. Имеем

$$S_{ABC} \geqslant 4\frac{AD^2\sin^2\dfrac{\angle A}{2}}{2\sin\angle A} = AD^2\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(см. решение упр. 15.2).

15.4. При доказательстве неравенств, связанных со сторонами треугольника, иногда бывает целесообразно ввести следующие обозначения: $a = m + n$, $b = n + k$, $c = m + k$, где $m = p - b$, $n = p - c$, $k = p - a$, причем $m, n, k > 0$ (рис. 4).

Воспользовавшись неравенством $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + zx)$, получим

$$ab + bc + ac = (m + n + k)^2 + mn + nk + mk \geqslant 4(mn + nk + mk) \geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt{3(mn\cdot nk + nk\cdot mk + mn\cdot mk)} = 4\sqrt{3}S.$$

15.5. Снова вводя обозначения $a = m + n$, $b = n + k$, $c = m + k$, где $m = p - b$, $n = p - c$, $k = p - a$, $m, n, k > 0$, получим

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=km^3+mn^3+nk^3-nmk^2-$$
$$-nkm^2-kmn^2=km(m-n)^2+mn(n-k)^2+nk(k-m)^2\geqslant 0.$$

15.6. Введем обозначения $a=p-k=\frac{1}{2}-k$, $c=p-b+k=\frac{1}{2}-$ $-b+k$, где $k=p-a>0$.

Доказываемое неравенство эквивалентно неравенству $(k-b)\times$ $\times(1-2b)\leqslant 0$, которое очевидно, так как $b<p=\frac{1}{2}$ и $c=p-$ $-b+k<p$, т.е. $k<b$.

15.7. На луче MA_i выберем точку B_i так, что $MB_i=\frac{1}{MA_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Справедливо равенство* $B_iB_j=\frac{A_iA_j}{MA_i\cdot MA_j}$.

Выделим два случая.

а) Лучи MA_i и MA_j не находятся на одной прямой. Заметим, что $\Delta MA_iA_j\sim\Delta MB_iB_j$, следовательно, $\frac{B_iB_j}{A_iA_j}=\frac{MB_j}{MA_i}=\frac{1}{MA_i\cdot MA_j}$, откуда $B_iB_j=\frac{A_iA_j}{MA_i\cdot MA_j}$.

б) Лучи MA_i и MA_j находятся на одной прямой. Имеем

$$B_iB_j=|MB_i\pm MB_j|=\left|\frac{1}{MA_i}\pm\frac{1}{MA_j}\right|=$$
$$=\left|\frac{MA_i\pm MA_j}{MA_i\cdot MA_j}\right|=\frac{A_iA_j}{MA_i\cdot MA_j}.$$

Таким образом, заданное неравенство эквивалентно известному неравенству $B_1B_2+B_2B_3+\ldots+B_{n-1}B_n\geqslant B_1B_n$.

Равенство имеет место, когда все точки $B_1,B_2,\ldots,B_n$ находятся на одной прямой в заданной последовательности. Если $M\in B_1B_n$, то в этом случае $A_1,A_2,\ldots,A_n\in B_1B_n$, причем нетрудно понять, что точки $M,A_1,A_2,\ldots,A_n$ находятся на одной прямой или в последовательности $M,A_1,A_2,\ldots,A_n$, или в последовательности $M,A_n,A_{n-1},\ldots,A_1$, или же для некоторого k в последовательности $A_k,A_{k-1},\ldots,A_1,M,A_n,\ldots,A_{k+1}$, или в последовательности $A_{k+1},\ldots,A_n,M,A_1,\ldots,A_k$.

Когда $M\notin B_1B_n$, около четырехугольника $MA_1A_2A_3$ можно описать окружность. Действительно,

$$\angle A_1A_2A_3+\angle A_1MA_3=\angle A_1A_2M+\angle MA_2A_3+\angle A_1MA_3=$$
$$=\angle MB_1B_3+\angle B_1B_3M+\angle B_1MB_3=180^\circ.$$

Так же доказывается, что около четырехугольников $MA_2A_3A_4,\ldots$ $\ldots,MA_{n-2}A_{n-1}A_n$ можно описать окружность. Таким образом, около многоугольника $MA_1A_2\ldots A_n$ можно описать окружность, при

этом M принадлежит той дуге A_1A_n, которая не содержит точки $A_2, \ldots, A_{n-1}$.

15.8. Выделим два случая.

а) $2\angle AOB + 2\angle BOC \leqslant \pi$.

Пусть $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = \gamma$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$. Рассмотрим на плоскости такие точки O', A', B', C', что $O'A' = a$, $O'B' = b$, $O'C' = c$, $\angle A'O'B' = 2\gamma$, $\angle B'O'C' = 2\alpha$, $\angle A'O'C' = 2\gamma + 2\alpha$.

Имеем $A'B' + B'C' \geqslant A'C'$, т. е.

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2\gamma} + \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos(2\gamma+2\alpha)} \geqslant \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 2\beta}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как $2\beta \leqslant 2\gamma + 2\alpha \leqslant \pi$.

б) $2\gamma + 2\alpha > \pi$, в этом случае

$$2\gamma > \pi - 2\alpha. \qquad (15.1)$$

Без ограничения общности можем считать, что $\alpha, \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$. Действительно, если $\alpha, \gamma > \frac{\pi}{2}$, то рассмотрим точки O, A, C, B_1, где B_1 и B симметричны относительно точки O. А если $\alpha > \frac{\pi}{2} \geqslant \gamma$, то рассмотрим точки O, A, B, C_1, где C_1 и C симметричны относительно точки O.

Следовательно, учитывая (15.1) и решение для случая а), получаем

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2\gamma} + \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\pi-2\alpha)} + \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos(\pi-2\alpha+2\alpha)} = a + c \geqslant \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 2\beta}.$$

15.9. а) Пусть $BU \geqslant CV$. В этом случае $AU \leqslant DV$. Проведем в квадрате среднюю линию MN (рис. 5) и $PP_1 \parallel QQ_1 \parallel AB$. Заметим, что проекции PP_1 и QQ_1 на AB не могут иметь общих точек, следовательно,

$$PQ \geqslant AB - (PP_1 + QQ_1) =$$
$$= AB - \left(\frac{P_1P_2}{2} + \frac{Q_1Q_2}{2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant AB - \left(\frac{MK}{2} + \frac{KN}{2}\right) = \frac{AB}{2}.$$

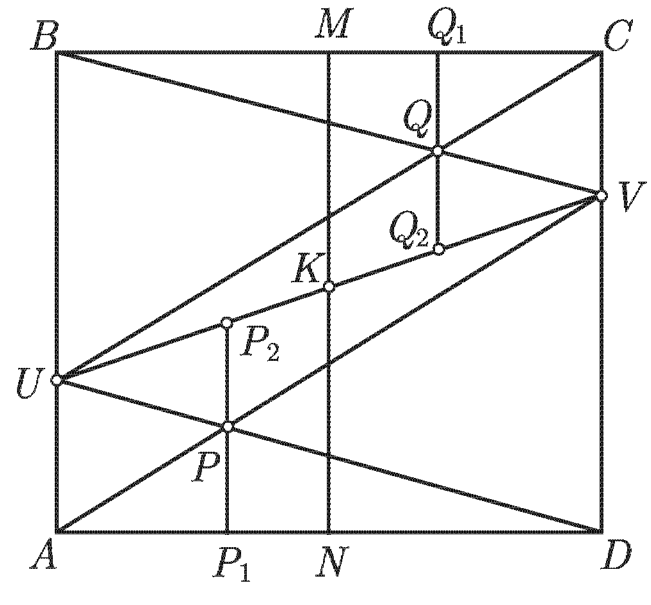

Рис. 5

б) Имеем $S_{QUV} = S_{QBC}$ и $\frac{S_{BUQ}}{S_{QUV}} = \frac{BQ}{QV} = \frac{S_{BQC}}{S_{CQV}}$, следовательно,

$$S_{UBCV} = 2S_{UQV}+S_{BQU}+S_{CQV} \geqslant 2S_{UQV}+2\sqrt{S_{BQU}S_{CQV}} = 4S_{UQV}.$$

Аналогично докажем, что $S_{AUVD} \geqslant 4S_{UPV}$. Следовательно,

$$S_{UPVQ} = S_{UPV} + S_{UQV} \leqslant \frac{S_{AUVD} + S_{UBCV}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}.$$

15.10. Рассмотрим рис. 6. Имеем $BF \geqslant MN$ и $BF \geqslant PK$, поэтому $BF \geqslant \dfrac{MN+PK}{2}$, или

$$2R_A \sin\alpha \geqslant \frac{(a\sin\beta + f\sin\gamma) + (c\sin\gamma + d\sin\beta)}{2}.$$

Следовательно, $R_A \geqslant \dfrac{1}{4}(a+d)\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{4}(f+c)\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

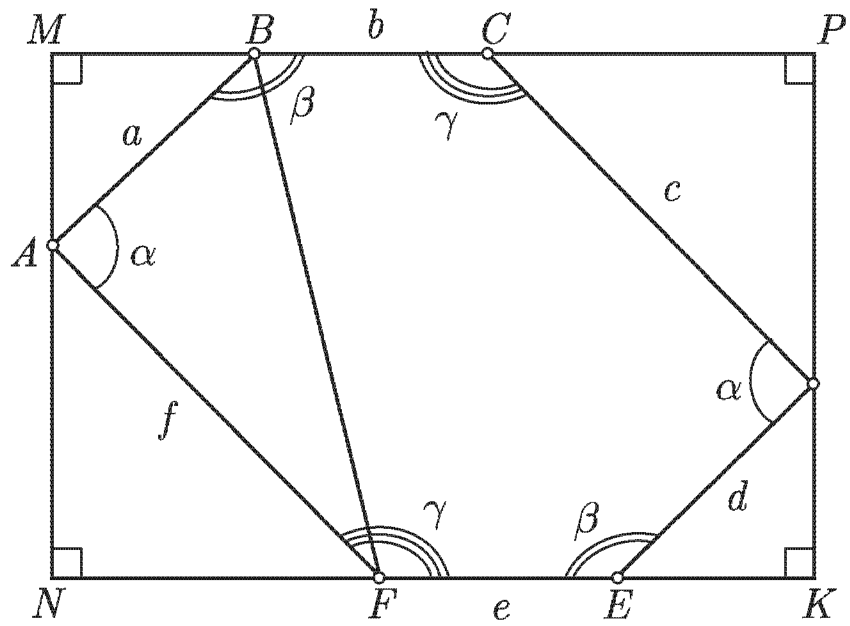

Рис. 6

Таким же образом получаем

$$R_C \geqslant \frac{1}{4}(f+c)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{1}{4}(b+e)\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$
$$R_E \geqslant \frac{1}{4}(b+e)\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{1}{4}(a+d)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Складывая эти неравенства и воспользовавшись неравенством $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ $(x > 0)$, имеем

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{1}{2}(a+d) + \frac{1}{2}(b+e) + \frac{1}{2}(f+c) = p.$$

Замечания. 1. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ABCDEF$ — правильный шестиугольник.

2. В общем случае это неравенство неверно. Например, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle F = 135^\circ$, $\angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$ и $BC = CD = DE = EF$.

3. Рассмотрим рис. 7; $R_A + R_C + R_E \geqslant p$ или $\frac{MP}{2} + \frac{NP}{2} + \frac{KP}{2} \geqslant PB + PD + PF$, а это известное неравенство Эрдёша–Морделлы.

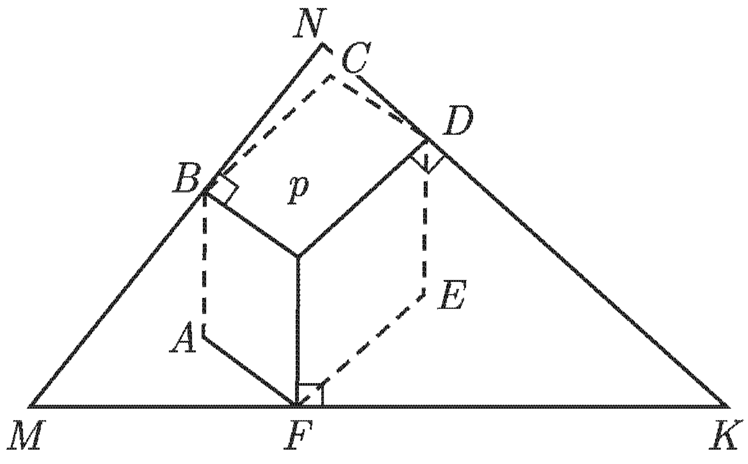

Рис. 7

15.11. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если квадрат $PQRS$ со стороной a вписан в прямоугольник $ABCD$* (рис. 8), *то $ABCD$ — тоже квадрат и квадрат со стороной a можно поместить в пятиугольник $ABQRD$ так, чтобы стороны квадрата были параллельны AB и AD.*

Действительно, рассмотрим поворот квадрата $PQRS$ вокруг его центра O на угол $90°$.

При этом точка R перейдет в точку Q, следовательно, прямая CD перейдет в прямую BC и, значит, точка O равноудалена от сторон CD и BC. Аналогично получаем, что точка O равноудалена от

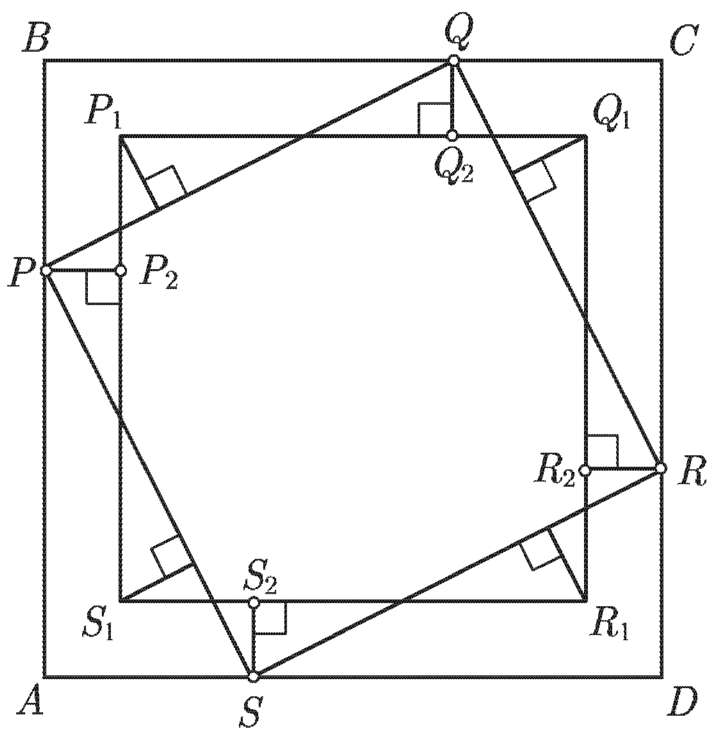

Рис. 8

сторон AB и BC, AD и AB. Из сказанного следует, что $ABCD$ — квадрат с центром O.

Рассмотрим квадрат $P_1Q_1R_1S_1$ с центром O, стороны которого параллельны AB и AD и $P_1Q_1 = PQ$ (см. рис. 8).

Осуществим параллельный перенос вектором $\overrightarrow{Q_1Q_2}$. При этом квадрат $P_1Q_1R_1S_1$ перейдет в квадрат $P'Q'R'S'$, который находится внутри пятиугольника $ABQRD$, так как, как нетрудно доказать, $Q_1Q_2 = PP_2 = SS_2$. Лемма доказана.

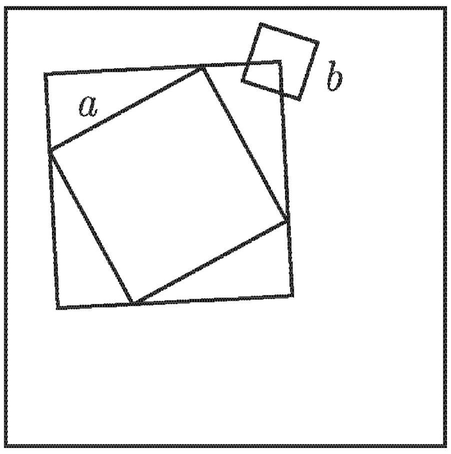

Рис. 9

Воспользовавшись леммой, мы можем расположить квадрат со стороной a внутри квадрата со стороной 1 так, чтобы их стороны были параллельны и чтобы квадрат со стороной a снова не имел общих точек с квадратом со стороной b (рис. 9). Воспользовавшись леммой еще один раз, получим, что стороны квадратов со сторонами a и b, не имеющих общих точек, параллельны сторонам квадрата со стороной 1. Теперь нетрудно доказать, что $a + b < 1$.

15.12. Сначала покажем, что окружность, описанная около правильного n-угольника со стороной b, не имеет точек вне окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной a. Действительно, предположим, что окружности пересекаются. На большей окружности выберем точку M так, чтобы она не была вершиной правильного n-угольника со стороной a и находилась внутри меньшей окружности.

Пусть заданы правильные n-угольники $A_1A_2\ldots A_n$ $(A_1A_2 = a)$ и $B_1B_2\ldots B_n$, причем точка M находится на малой дуге A_1A_2. Имеем $\angle A_1MA_2 = \dfrac{\pi(n-1)}{n}$ и многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ находится внутри угла $\angle A_1MA_2$.

Следовательно, многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ также находится внутри этого угла.

Поэтому $\angle A_1MA_2 > \max\limits_{i,j}\angle B_iMB_j = \dfrac{\pi(n-1)}{n}$, что невозможно.

Обозначим радиусы этих окружностей через R_a и R_b, а центры этих окружностей — через O и O_1. Из сказанного ясно, что $R_a \geqslant R_b + OO_1$, а поскольку O не находится внутри многоугольника $B_1B_2\ldots B_n$, то $OO_1 > r_b$, где r_b — радиус окружности, вписанной в $B_1B_2\ldots B_n$.

Таким образом, $R_a > R_b + r_b$, или $\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}} > \dfrac{b}{2\sin\dfrac{\pi}{n}} + \dfrac{b}{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}$, откуда получаем, что $b < \dfrac{a}{2\cos^2\dfrac{\pi}{2n}}$.

15.13. Введем обозначения $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{e}$. Тогда нужно доказать, что

$$2(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2+\vec{e}^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})^2) \geqslant$$
$$\geqslant (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})^2+(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})^2,$$

а это неравенство эквивалентно очевидному неравенству

$$(\vec{a}+\vec{c}+\vec{e})^2+(\vec{a}+\vec{d})^2+(\vec{b}+\vec{e})^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})^2 \geqslant 0.$$

15.14. Имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i MA_i \geqslant \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{MA_i}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n m_i(\overrightarrow{MM_0}+\overrightarrow{M_0A_i})\vec{e}_i =$$
$$= \overrightarrow{MM_0}\sum_{i=1}^n m_i e_i + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_0A_i}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n m_i M_0A_i.$$

Замечание. Равенство имеет место в том и только том случае, когда $M \equiv M_0$.

15.15. Имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i MA_i \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} m_i \overrightarrow{MA_i}\vec{e}_i - \overrightarrow{MA_n}\sum_{i=1}^{n-1} m_i\vec{e}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} m_i(\overrightarrow{MM_0}+\overrightarrow{MA_n})\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\overrightarrow{A_nA_i}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A_nA_i.$$

Замечание. Равенство имеет место в том и только том случае, когда $M \equiv A_n$.

15.16. Имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i C_iC_{i+1} \geqslant \sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{C_iC_{i+1}}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n m_i\left(\overrightarrow{C_iA_{i+1}}+\overrightarrow{A_{i+1}C_{i+1}}\right)\vec{e}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(m_{i-1}\overrightarrow{A_iC_i}\vec{e}_{i-1}+m_i\overrightarrow{C_iA_{i+1}}\vec{e}_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(m_i\overrightarrow{A_iC_i}\vec{e}_i+m_i\overrightarrow{C_iA_{i+1}}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n m_i\vec{e}_i\left(\overrightarrow{A_iC_i}+\overrightarrow{C_iA_{i+1}}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n m_i\vec{e}_i\left(\overrightarrow{A_iB_i}+\overrightarrow{B_iA_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{B_iB_{i+1}}\vec{e} = \sum_{i=1}^n m_i B_iB_{i+1},$$

где $m_0 = m_n$, $\vec{e}_0 = \vec{e}_n$.

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^n m_i C_iC_{i+1} \geqslant \sum\limits_{i=1}^n m_i B_iB_{i+1}$.

15.17. Имеем

$$\cos\angle AMP\cos\angle BMP\leqslant\frac{\cos(\angle AMP+\angle BMP)+1}{2}\leqslant\cos^2\frac{\angle AMP}{2},$$

следовательно, правая часть доказываемого неравенства не больше

$$\Bigl(2\sqrt{MA\cdot MB}\cos\frac{\angle AMB}{2}+2\sqrt{MB\cdot MC}\cos\frac{\angle BMC}{2}+$$
$$+2\sqrt{MA\cdot MC}\cos\frac{\angle AMC}{2}\Bigr),$$

которое не больше $MA+MB+MC$, так как $(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_1}-\overrightarrow{MB_1})^2\geqslant$ $\geqslant 0$. Выберем точки A_1, B_1 и C_1 так, чтобы

$$|\overrightarrow{MA_1}|=\sqrt{MA},\qquad|\overrightarrow{MB_1}|=\sqrt{MB},\qquad|\overrightarrow{MC_1}|=\sqrt{MC},$$
$$(\widehat{\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MB_1}})=\frac{\angle AMB}{2},\qquad(\widehat{\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MC_1}})=\frac{\angle BMC}{2},$$
$$(\widehat{\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MC_1}})=\pi-\frac{\angle AMC}{2}.$$

15.18. Имеем

$$d_i\leqslant\sqrt{R_iR_{i+1}}\cos\frac{\angle A_iMA_{i+1}}{2}$$

(см. решение упр. 15.17). Пусть $\varphi_i=\dfrac{\angle A_iMA_{i+1}}{2}$, $i=1,\ldots,n$. Необходимо доказать неравенство

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n\geqslant\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_n,$$

где $0<\varphi_1<\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi_1+\varphi_2+s+\varphi_n=\pi$.

Последнее доказывается методом Штурма. Достаточно заметить, что, если $\varphi_i<\dfrac{\pi}{n}<\varphi_j$, то

$$\cos\varphi_i\cos\varphi_j=\frac{\cos(\varphi_i+\varphi_j)+\cos(\varphi_i-\varphi_j)}{2}<$$
$$<\frac{\cos(\varphi_i+\varphi_j)+\cos\left(\varphi_i+\varphi_j-\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2}=\cos\left(\varphi_i+\varphi_j-\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}.$$

15.19. Пусть это точки $A_i(x_i,y_i,z_i)$, а вершины куба — точки $(0,0,0)$, $(0,1,0)$,…, $(1,1,1)$.

Имеем $x_i,y_i,z_i\in[0,1]$, $i=1,2,3$. Следовательно,

$$A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2\leqslant 2\max(x_i-x_j)^2+$$
$$+2\max(y_i-y_j)^2+2\max(z_i-z_j)^2\leqslant 6,$$

откуда $\min(A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1) \leqslant \sqrt{2}$.

15.20. Обозначим середины отрезков AB и CD через M и N. Докажем, что $AB^2 + CD^2 + 2MN^2 \leqslant 6$.

Действительно, рассмотрим точки A', B', C', D', M', N', симметричные точкам A, B, C, D, M, N относительно центра куба. Рассмотрим параллелограммы $D'CDC'$, $ABA'B'$ и $MNM'N'$. Поскольку сумма квадратов двух смежных сторон параллелограмма не больше квадрата большей диагонали этого параллелограмма, то $CD^2 + NN'^2 \leqslant 3$ и $AB^2 + MM'^2 \leqslant 3$, следовательно, $CD^2 + AB^2 + NN'^2 + MM'^2 \leqslant 6$, или $CD^2 + AB^2 + 2MN^2 + 2MN'^2 \leqslant 6$, откуда $CD^2 + AB^2 + 2MN^2 \leqslant 6$.

Таким образом,

$$6 \geqslant CD^2 + AB^2 + 2MN^2 \geqslant 3\sqrt[3]{CD^2 \cdot AB^2 \cdot 2MN^2},$$

или $2 \geqslant CD \cdot AB \cdot MN \geqslant AB \cdot CD \cdot d$.

15.21. Пусть пирамида $ABCD$ находится внутри параллелепипеда объемом V. Из точки A проведем прямую, параллельную грани BCD. Эта прямая пересекает одну из граней параллелепипеда в точке A_1. Тогда $V_{ABCD} = V_{A_1BCD}$.

Из точки A_1 проведем прямую, которая пересечет ребра параллелепипеда в точках A_3 и A_2. В этом случае

$$V_{A_1BCD} \leqslant \max(V_{A_3BCD}, V_{A_2BCD}) = V_{A_3BCD}.$$

Если A_3 принадлежит ребру A_5A_4 параллелепипеда, то

$$V_{A_3BCD} \leqslant \max(V_{A_5BCD}, V_{A_4BCD}).$$

Таким образом, мы доказали, что существует такая вершина A_0 параллелепипеда, для которой $V_{ABCD} \leqslant V_{A_0BCD}$. Аналогично, существуют такие вершины B_0, C_0 и D_0 параллелепипеда, что

$$V_{ABCD} \leqslant V_{A_0BCD} \leqslant V_{A_0B_0CD} \leqslant V_{A_0B_0C_0D} \leqslant V_{A_0B_0C_0D_0}.$$

Остается заметить, что $V_{A_0B_0C_0D_0}$ равно $\frac{1}{6}V$ или $\frac{1}{3}V$.

15.22. Нетрудно доказать, что куб ребром a и центр единичного куба находятся по разные стороны плоскости α, содержащей одну из граней куба с ребром a.

Рассмотрим два случая:

а) α параллельна одному из ребер единичного куба;

б) α не параллельна ни одному из ребер единичного куба.

В случае а) доказательство получается, если спроектировать куб с ребром a и симметричный ему куб относительно центра единичного куба на ту грань единичного куба, которая перпендикулярна плоскости α (см. упр. 15.11).

б) Пусть куб с ребром a находится внутри пирамиды $ABCD$, где A — вершина единичного куба и полупрямые AB, AC, AD содержат

три ребра, выходящих из вершины A единичного куба, причем плоскость (BCD) совпадает с плоскостью α.

Рассмотрим плоскость $(B'C'D')$, которая параллельна (BCD) и которой принадлежит одна из граней куба с ребром a, причем $B' \in \in AB$, $C' \in AC$, $D' \in AD$. Воспользовавшись упр. 15.25, получим, что куб с ребром a можно вложить в пирамиду $ABCD$ так, что одно из его ребер будет принадлежать, например, отрезку $B'C'$.

Теперь рассмотрим плоскости β и β', которые содержат грани куба с ребром a и перпендикулярны прямой $B'C'$. Воспользовавшись тем фактом, что квадрат, находящийся внутри прямоугольного треугольника, можно расположить так, что две смежные стороны квадрата находятся на катетах треугольника (доказательство этого можно получить, используя леммы из упр. 15.25 и упр. 15.11), получим, что куб с ребром a расположен внутри пирамиды $ABCD$, причем одна из граней куба принадлежит грани ABC. Повторяя эти рассуждения еще один раз, получим решение задачи.

15.23. На плоскости имеем точки X и Y. Возьмем произвольную прямую l_0. Пусть XY составляет с прямой l_0 угол α. Возьмем на прямой l_0 некоторую точку O. Обозначим через l_φ образ прямой l_0, получающийся при повороте плоскости вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ. Проекции точек X и Y на прямую l_φ обозначим X_φ и Y_φ соответственно. Очевидно, что $X_\varphi Y_\varphi = = XY|\cos(\varphi - \alpha)|$.

Отсюда получаем

$$\int_0^\pi X_\varphi Y_\varphi \, d\varphi = \int_0^\pi XY|\cos(\varphi-\alpha)| \, d\varphi = XY\int_0^\pi |\cos(\varphi-\alpha)| \, d\varphi.$$

Справедливо равенство

$$\int_b^a f(g(\varphi))g'(\varphi) \, d\varphi = \int_{g(b)}^{g(a)} f(\beta) \, d\beta.$$

Положив в нем $a=\pi$, $b=0$, $g(\varphi)=\varphi-\alpha$, $f(\beta)=|\cos\beta|$, получим

$$XY\int_0^\pi |\cos(\varphi-\alpha)| \, d\varphi = XY\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} |\cos\beta| \, d\beta.$$

Поскольку интеграл периодической функции $|\cos\beta|$ с периодом π на отрезке длины π не зависит от положения этого отрезка, то

$$XY\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} |\cos\beta| \, d\beta = XY\int_0^\pi |\cos\beta| \, d\beta = 2XY\int_0^{\pi/2} \cos\beta \, d\beta = 2XY.$$

Получили
$$\int_0^\pi X_\varphi Y_\varphi \, d\varphi = 2XY. \tag{15.2}$$

Теперь докажем, что для произвольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеет место неравенство

$$AB + BC + CA + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \leqslant$$
$$\leqslant AA_1 + AB_1 + AC_1 + BA_1 + BB_1 + BC_1 + CA_1 + CB_1 + CC_1.$$

Доказательство последнего сначала получим в том случае, когда точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Поскольку неравенство симметрично относительно троек точек A, B, C и A_1, B_1, C_1, то можно считать, что точка B находится между точками A и C, а точка B_1 — между точками A_1 и C_1. В этом случае $p = 2AC + 2A_1C_1$, и согласно неравенству треугольника $AC \leqslant AB_1 + B_1C$, $A_1C_1 \leqslant A_1B + BC_1$, следовательно,

$$AC + A_1C_1 \leqslant AB_1 + B_1C + A_1B + BC_1.$$

Аналогично имеем $AC + A_1C_1 \leqslant (AA_1 + AC_1) + (CA_1 + CC_1)$.

Таким образом,

$$p = (AC + A_1C_1) + (AC + A_1C_1) \leqslant (AB_1 + B_1C + A_1B + BC_1) +$$
$$+ (AA_1 + CA_1 + AC_1 + CC_1) \leqslant Q,$$

т. е. $p \leqslant Q$.

Теперь возьмем какую-нибудь прямую l_0 и точку O на ней. Обозначим через $A\varphi$, $B\varphi$, $C\varphi$, $A_1\varphi$, $B_1\varphi$, $C_1\varphi$ проекции точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 на прямую l_φ, получающиеся при повороте плоскости вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ. В этом случае, согласно неравенству полученному выше, имеем

$$p\,(\varphi) = A_\varphi B_\varphi + B_\varphi C_\varphi + C_\varphi A_\varphi + A_{1\varphi}B_{1\varphi} + B_{1\varphi}C_{1\varphi} + C_{1\varphi}A_{1\varphi} \leqslant$$
$$\leqslant A_\varphi A_{1\varphi} + A_\varphi B_{1\varphi} + A_\varphi C_{1\varphi} + B_\varphi A_{1\varphi} + B_\varphi B_{1\varphi} + B_\varphi C_{1\varphi} +$$
$$+ C_\varphi A_{1\varphi} + C_\varphi B_{1\varphi} + C_\varphi C_{1\varphi} = Q\,(\varphi)\,.$$

Если $p(\varphi) \leqslant Q(\varphi)$, то

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi p(\varphi)\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(\varphi)\,d\varphi. \tag{15.3}$$

Из (15.2) и (15.3) имеем

$$AB + BC + AC + A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 \leqslant$$
$$\leqslant AA_1 + AB_1 + AC_1 + BA_1 + BB_1 + BC_1 + CA_1 + CB_1 + CC_1.$$

15.24. Проведем координатные оси так, чтобы они проходили через стороны данного квадрата. Обозначим через $f_i(x)$ длину отрезка, получающегося при пересечении перпендикуляра к оси Ox в точке x и i-го круга (если пересечения нет, то $f_i(x) = 0$). В этом случае $S_i = \int_0^1 f_i(x)\,dx$, где S_i — площадь i-го круга. Следовательно,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{1988} = \int_0^1 (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\,dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ясно, что существует такое число x_0, что $f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0) \geqslant \frac{1}{2}$ $\left(\text{если такая точка не существует, то } f_1(x) + \ldots + f_1(x) < \frac{1}{2} \text{ и } \int_0^1 (f_1(x) + \ldots + f_1(x))\,dx < \frac{1}{2}\right)$.

Именно для этой точки x_0 сумма длин отрезков, получающихся при пересечении перпендикуляра к оси Ox в точке x_0 и заданных кругов, не меньше $\frac{1}{2}$.

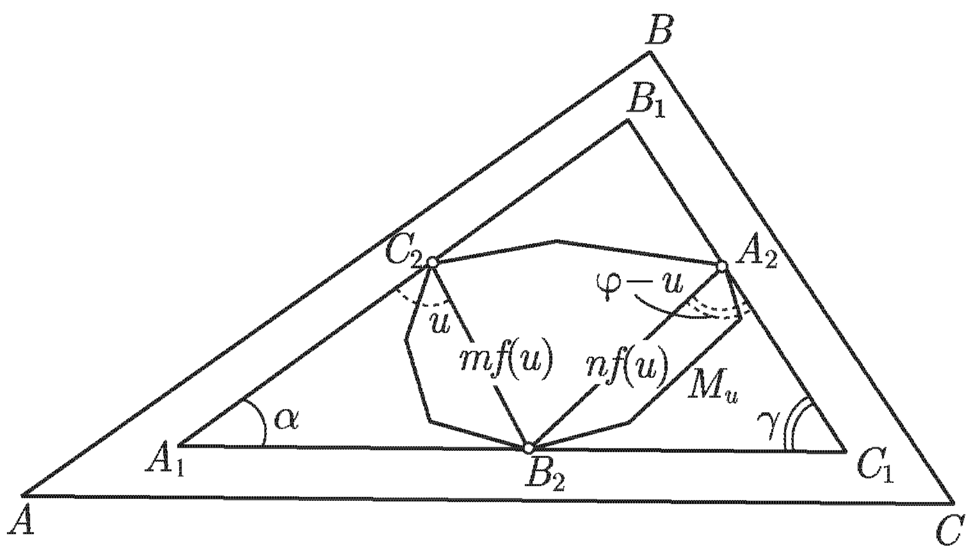

Рис. 10

15.25. Достаточно решить задачу для треугольника $A_1B_1C_1$. Выделим два случая (рис. 10 и рис. 11).

Рассмотрим рис. 10. Произведем поворот вокруг вершины C_2 на такой угол, при котором одна из сторон с вершинами C_2, B_2, A_2 многоугольника M впервые станет параллельна прямым A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 соответственно. Пусть $u \in [u_1, u_2]$, причем u_1 и u_2 — значения u для двух описанных выше поворотов (в положительном и отрицательном направлениях). Обозначим через M_u образ, который получается при повороте многоугольника M вокруг C_2 и последующих преобразованиях подобия с центрами A_1 и B_1 который снова вписан в треугольник $A_1B_1C_1$.

Понятно, что какие-нибудь стороны многоугольников M_{u_1} и M_{u_2} будут находиться на одной из сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть $C_2B_2 = mf(u)$, $A_2B_2 = nf(u)$.

Докажем, что функция $f(u)$ на отрезке $[u_1, u_2]$ принимает наибольшее значение в токах u_1 или u_2.

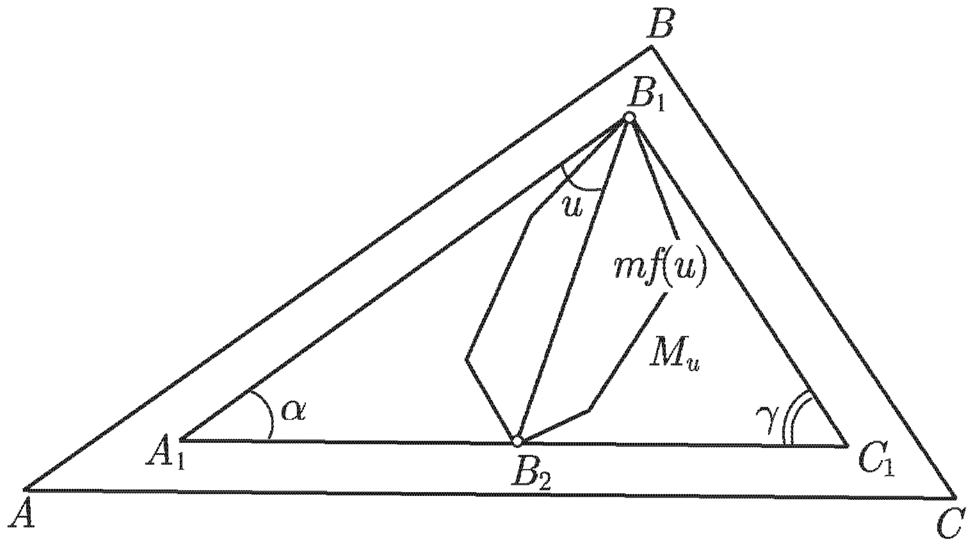

Рис. 11

Действительно, имеем

$$A_1C_1 = A_1B_2 + B_2C_1 = \frac{mf(u)\sin u}{\sin\alpha} + \frac{nf(u)}{\sin\gamma}\sin(\varphi - u),$$

откуда

$$f(u) = \frac{A_1C_1\sin\alpha\sin\gamma}{m\sin u\sin\gamma + n\sin(\varphi - u)\sin\alpha} = \frac{A_1C_1\sin\alpha\sin\gamma}{a\sin(u+\varphi_1)},$$

где a, φ и φ_1 — постоянные. Так как при $u \in [u_1, u_2]$ $f(u) > 0$, т. е. $\sin(u+\varphi_1) > 0$, то $\sin(u+\varphi_1)$ принимает свое наименьшее значение на отрезке $[u_1, u_2]$ в точках u_1 или u_2.

Случай на рис. 11 доказывается аналогично.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 1. Докажите, что периметр этого треугольника не меньше $6\sqrt{3}$.

2. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон выпуклого n-угольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей, где $n \geqslant 4$.

3. Задан выпуклый четырехугольник с единичной площадью. Докажите, что внутри этого четырехугольника можно выбрать четыре такие точки, что площадь треугольника, образованного любой тройкой этих точек, будет не меньше $\frac{1}{4}$.

4. Докажите, что на разных сторонах треугольника с площадью S существуют такие три точки, которые являются вершинами правильного треугольника с площадью не больше $\frac{S}{4}$.

5. Площадь треугольника ABC равна 1, причем точки D, E находятся на сторонах AB и AC соответственно. Пусть отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что $S_{PDE} \leqslant 5\sqrt{2} - 7$, если $S_{BCED} = 2S_{PBC}$.

6. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, которая пересекает стороны BC и AC в точках P и Q, соответственно. Докажите, что $S_{MPQ} \geqslant \frac{2}{9}S_{ABC}$, где M — середина стороны AB.

7. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные вершинам A, B и C треугольника ABC относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \leqslant 4S_{ABC}$.

8. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $\sqrt{S_{ABO}} + \sqrt{S_{CDO}} \leqslant \sqrt{S_{ABCD}}$.

9. Биссектрисы внутренних углов A, B и C треугольника ABC второй раз пересекают окружность, описанную около ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + AC$.

10. Пусть h — наименьшая высота треугольника ABC. Докажите, что внутри треугольника ABC можно расположить по крайней мере 29 квадратов со стороной $\frac{h}{8}$ так, что никакие два из них не будут иметь общих внутренних точек.

11. На стороне AB треугольника ABC вне его построен квадрат с центром в точке O. Пусть M и N — середины сторон BC и AC. Докажите, что $OM + ON \leqslant \frac{\sqrt{2}+1}{2}(BC + AC)$.

12. Пусть m_a, m_b и m_c — медианы остроугольного треугольника со сторонами a, b, c, а расстояния ортоцентра от вершин треугольника равны d_a, d_b, d_c. Докажите, что $m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

13. Пусть M — внутренняя точка треугольника ABC, причем прямые AM, BM, CM пересекают стороны BC, AB и AC в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что $\frac{AM}{MP}\frac{BM}{MQ}\frac{CM}{MR} \geqslant 8$.

14. Радиус окружности, вписанной в равнобочный треугольник ABC $(AB = BC)$, равен r. Докажите, что, $AB > 3r$.

15. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Обозначим центры окружностей, описанных около треугольников AOB и COD, через P и Q соответственно. Докажите, что $PQ > \dfrac{AB+CD}{4}$.

16. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть длины малых дуг B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 равны l_1, l_2 и l_3 соответственно. Докажите, что $\dfrac{BC}{l_1}+\dfrac{AC}{l_2}+\dfrac{AB}{l_3} \geqslant 9\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

17. Известно, что прямоугольный треугольник ABC можно покрыть двумя единичными кругами. Докажите, что $S_{\Delta ABC} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

18. На плоскости заданы 111 единичных векторов, сумма которых — нулевой вектор. Докажите, что из этих 111 можно выбрать 55 таких векторов, модуль суммы которых будет не больше 1.

19. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение боковых сторон трапеции не меньше произведения оснований.

20. В треугольнике ABC $\angle MAC = 15^\circ$, где M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle ABC \leqslant 105^\circ$.

21. В круге диаметром 5 заданы десять точек. Докажите, что расстояние между какими-нибудь двумя точками из этих десяти не больше 2.

22. Прямые, содержащие боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$, описанной около окружности, пересекаются в точке M, а диагонали AC и BD — в точке N. Докажите, что $90^\circ < \angle AND < 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle AMD$.

23. Известно, что в четырехугольнике $ABCD$, описанном около окружности, наибольшая сторона равна AD. Прямые, содержащие стороны AB и CD, пересекаются в точке M, а диагонали AC и BD — в точке N. Докажите, что $90^\circ \leqslant \angle AND \leqslant 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle AMD$

24. Известно, что треугольник ABC разбит на 1995 таких треугольника, что никакие два из них не имеют общих внутренних точек и в каждом из них один угол больше 120°. Докажите, что треугольник ABC можно также разбить на 1994 таких треугольника.

25. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ дано, что $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360^\circ$. Докажите, что $R_A + R_C + R_E \geqslant p$ (см. обозначения упр. 15.10).

26. Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников со сторонами a, b, c, d наибольшую площадь имеет тот четырехугольник, около которого можно описать окружность.

27. Известно, что прямоугольник $ABCD$ можно вложить в прямоугольный треугольник так, чтобы сторона AB находилась на гипотенузе, а также так, чтобы сторона AD находилась на гипотенузе. Докажите, что этот прямоугольник можно вложить в прямоугольный треугольник так, чтобы одна из вершин прямоугольника совпадала с вершиной прямого угла треугольника.

28. Докажите, что из треугольников, вписанных в окружность радиусом R, равносторонний треугольник имеет наибольшие:

а) площадь;

б) периметр;

в) отношение площади к полупериметру (т. е. радиус вписанной окружности);

г) отношение площади к квадрату полупериметра.

29. Известно, что прямоугольник со сторонами a, b находится внутри прямоугольника со сторонами c и d и что $\max(a, b) > \max(c, d)$. Докажите, что $2ab < cd$.

30. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны параллельны. Обозначим середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA через A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 соответственно.

Докажите, что:

а) из отрезков A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 можно построить треугольник;

б) $\frac{1}{2}S_{\Delta BDF} < S_1 \leqslant S_{\Delta BDF}$, где S_1 — площадь треугольника со сторонами A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1.

31. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+ka_ib_i} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2+k\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i},$$

где $|k| \leqslant 2$.

32. Докажите, что если $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ и $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$, то

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta \geqslant 16 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta.$$

33. Докажите неравенство

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\gamma}{8}\right),$$

где α, β, γ — углы некоторого треугольника.

34. Докажите, что если $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n > 1$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < \frac{\pi}{2}(n-1)$.

35. Координаты всех вершин остроугольного треугольника — целые числа, а стороны не меньше $\sqrt{65}$. Какую наименьшую площадь может иметь такой треугольник?

36. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что сумма углов MAB, MBC и MCA больше меньшего угла треугольника и меньше суммы двух других углов.

37. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC, и его вершины лежат на разных сторонах последнего. Докажите, что

$$S_{A_1B_1C_1} \geqslant \frac{r^2}{R^2} S_{ABC},$$

где r и R — радиусы окружностей, соответственно вписанных в треугольник ABC и описанных вокруг треугольника ABC.

б) Докажите, что $R \geqslant 2r$, где R и r — радиусы окружностей, соответственно описанных вокруг треугольника ABC и вписанных в треугольник ABC.

38. Докажите, что не существуют пять таких векторов, что угол, образованный любыми двумя из них, тупой.

39. Докажите, что если выпуклый n-угольник, вписанный в окружность, содержит центр окружности и длины его сторон меньше длины вписанного в эту окружность правильного пятиугольника, то площадь пятиугольника меньше площади n-угольника.

40. Докажите, что площадь треугольника, вписанного в окружность, меньше половины площади этого круга.

41. Докажите, что сумма расстояний центра тяжести треугольника от сторон треугольника не меньше трех радиусов вписанной окружности.

42. Докажите, что периметр остроугольного треугольника больше $4R$, где R — радиус окружности, описанной около этого треугольника.

43. Докажите, что для любого остроугольного треугольника с площадью 1 можно найти прямоугольный треугольник с площадью не больше $\sqrt{3}$, в который можно вложить данный треугольник.

44. В квадрате со стороной 50 задана ломаная такая, что для любой точки A внутри квадрата существует какая нибудь точка B

на ломаной, что $AB \leqslant 1$. Докажите, что длина ломаной не меньше 1248.

45. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AD^2+BC^2 = BD^2+AC^2 = AB^2+CD^2$. Докажите, что какая-нибудь грань пирамиды является остроугольным треугольником.

46. Докажите, что площадь любого сечения куба плоскостью, проходящей через центр куба, не меньше площади грани куба.

47. В четырехугольнике $ABCD$ дано $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 4$ и $AD = 7$. Точки M, N, K, E являются серединами сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Найдите наибольшее значение суммы $MK + NE$.

48. Решите предыдущую задачу при условии $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.

49. Для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет место неравенство

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) + \cos(\widehat{\vec{b},\vec{j}}) + \cos(\widehat{\vec{e},\vec{k}}) > \frac{5}{2}.$$

Докажите, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не параллельны одной плоскости.

50. Заданы 101 прямоугольник, стороны которых — целые числа, не превышающие 100. Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать прямоугольники A, B, C такие, что их можно вложить друг в друга, т. е. $A \subseteq B \subseteq C$.

51. Докажите, что площадь правильного треугольника, вписанного в другой правильный треугольник площадью S не меньше $0{,}25S$.

52. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$ $(AD||BC)$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 2\sqrt{S}$, где S — площадь четырехугольника $ABCD$.

53. Пусть $S = a+b+c$ и $t = ab+bc+ca$, где a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $3t \leqslant S^2 < 4t$.

54. Докажите неравенство

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(c\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + c\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) \geqslant \geqslant \left(\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\cos\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\cos\frac{\gamma}{2}}\right)^2,$$

где α, β, γ — углы некоторого треугольника.

55. Докажите неравенство

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sin A}{(a-b)(a-c)} + \frac{\sin B}{(b-a)(b-c)} + \frac{\sin C}{(c-a)(c-b)} < 0,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

56. Докажите следующие неравенства:

а) $(a^2+b^2-h_c^2)^{1/2} + (b^2+c^2-h_a^2)^{1/2} + (c^2+a^2-h_b^2)^{1/2} \leqslant 6R$;

б) $\dfrac{3}{8}(ab+bc+ca) \leqslant m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \leqslant \dfrac{5}{4}(ab+bc+ca)$;

в) $\dfrac{a}{l_b+l_c} + \dfrac{b}{l_a+l_c} + \dfrac{c}{l_a+l_b} \geqslant \sqrt{3}$;

г) $\dfrac{l_a}{b+c} + \dfrac{l_b}{a+c} + \dfrac{l_c}{a+b} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Здесь l_a — биссектриса угла A треугольника со сторонами a, b, c, а h_a и m_a — высота и медиана, опущенные на сторону a соответственно.

57. На верхней стороне параллельной оси Ox любого из n прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям, построены равные им прямоугольники. Докажите, что площадь фигуры, получающейся при объединении этих $2n$ прямоугольников, не больше $2S$, где S — площадь фигуры, получающейся при объединении n прямоугольников.

58. На плоскости заданы $2n$ точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Докажите, что существуют по крайней мере n прямых таких, что каждая из них проходит через две из заданных точек и что по каждую сторону от нее имеется $n-1$ точек.

59. На плоскости заданы точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что:

а) существует прямая l такая, что сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i h_i(l)$ минимальна, где через $h_i(l)$ обозначено расстояние точки A_i от прямой l, а m_i — постоянные положительные числа;

б) прямая l совпадает с одной из прямых A_iA_j.

60. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$.

Докажите неравенство $\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

61. Пусть внутри треугольника ABC задана точка M. Докажите, что

$$\min(MA, MB, MC) + MA + MB + MC < AA_1 + BB_1 + CC_1,$$

где A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно.

62. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ соответственно, а p_1 и p_2 — их периметры. Докажите, что

$$\frac{O_1O_2}{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2} < \frac{p_1 + p_2}{2\max(p_1, p_2)},$$

где O_1 и O_2 не совпадают.

§ 16. СТО ИЗБРАННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Докажите следующие неравенства.

1. $x_1^4 + \ldots + x_n^4 \geqslant x_1^3 + \ldots + x_n^3$, где $x_1 \ldots x_n \geqslant 1$.

2. $a_1 + \ldots + a_n \leqslant n$, где $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \geqslant -1$ для любого значения x.

3. $x^{2^x} + x^{3^x} + \ldots + x^{n^x} \geqslant 2^{x^2} + 3^{x^3} + \ldots + n^{x^n}$, где $x \geqslant n$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$.

4. $0{,}785n^2 - n < \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots$
$$\ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0{,}79n^2,$$
где $n \in \mathrm{N}$.

5. $\max(x, y, z) - \min(x, y, z) \leqslant \dfrac{4}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$, где $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $x, y, z > 0$.

6. $(a_1 + \ldots + a_n)(\sqrt[k]{2} - 1) < \sqrt[k]{2a_1^k + \ldots + 2^n a_n^k}$, где $a_1, \ldots, a_n > 0$.

7. $x_1^{k-1} + \ldots + x_n^{k-1} \geqslant (n-1)\left(\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$, где $\dfrac{1}{1 + x_1^k} + \ldots + \dfrac{1}{1 + x_n^k} = 1$, $k \geqslant 2$, $k \in \mathrm{N}$, $x_1, \ldots, x_n > 0$.

8. $x^y + y^x > 1$, где $x, y > 0$.

9. $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2} \prod\limits_{i=1}^{n} |x - a_i| \leqslant 108^n \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \prod\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

10. $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1$, где $p + q = 1$, $p, q \geqslant 0$, $m, r \in \mathrm{N}$.

11. $\left(\dfrac{p}{k}\right)^k \left(\dfrac{q}{l}\right)^l \leqslant 1$, где $p, k, q, l \in \mathrm{N}$, $k + l \geqslant p + q$.

12. $\left(\dfrac{a_1}{a_2 + \ldots + a_n}\right)^k + \ldots + \left(\dfrac{a_n}{a_1 + \ldots + a_{n-1}}\right)^k \geqslant \dfrac{n}{(n-1)^k}$, где $n \geqslant 2$; $0 < k \leqslant 1$ и $a_1, \ldots, a_n > 0$.

13. $(ab + bc + ac)\left|1 - \dfrac{1}{abc}\right| \leqslant \left|ab - \dfrac{1}{c}\right| + \left|bc - \dfrac{1}{a}\right| + \left|ac - \dfrac{1}{b}\right|$, где a, b, $c > 0$.

14. $n(1 + a^{2n}) \geqslant a^{2n-1} + a^{2n-2} + \ldots + a^2 + a$, где $n \in \mathrm{N}$.

15. $\sqrt{12uvw} + u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$, где $u, v, w \geqslant 0$, $u + v + w = 1$.

16. $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, где $abc=1$, $a, b, c>0$.

17. $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+a+c} \leqslant \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$, где $abc=1$, $a, b, c>0$.

18. $a+b+c+d \geqslant \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$, где $a, b, c, d \geqslant 0$ и $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd=16$.

19. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{b_i} \geqslant \frac{n^{2-p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}$, где $a_i, b_i>0$, $i=1,2, \ldots, n$, $p \geqslant 2$.

20. $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{abc+c}$, где $a, b, c \geqslant 1$.

21. $S_p+S_q-S_{pq} \leqslant 1$, где $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

22. $a_i \geqslant 0\,(i=1, \ldots, n)$, где $a_1=a_n=0$, $a_{k-1}+a_{k+1} \leqslant 2a_k$ $(k=2, \ldots n-1)$.

23. $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+abc(a+b+c) \geqslant 0$, где $a, b, c \geqslant 0$.

24. $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+3(abc)^{4/3} \geqslant 0$, где a, b, $c \geqslant 0$.

25. $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$, где $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, $m \in Z$, $n \in \mathrm{N}$.

26. $$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+a_1^2+a_2^2} \geqslant \\ \geqslant \sqrt{3}\,(a_1+\ldots+a_n).$$

27. $$(5a_1+4a_2+2a_3)\sqrt{3} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{a_1^2+2a_2^2}+3\sqrt{a_2^2+2a_3^2}+7\sqrt{2a_1^2+a_2^2}.$$

28. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \operatorname{arctg} x_i \geqslant \frac{n}{2}\ln 2$, где $x_1 \ldots x_n=1$, $x_1, \ldots, x_n>0$.

29. $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}<\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}$, где $n>1$, $n \in \mathrm{N}$.

30. $$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+ \\ +(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)+\ldots \\ \ldots+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) \geqslant 0.$$

31. $\dfrac{n(n-1)}{2}\Big(\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_1a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_1a_n}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_2a_n}+\ldots$
$\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}\Big)\geqslant 4\Big(\dfrac{1}{a_1+a_2}+\dfrac{1}{a_1+a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_1+a_n}+\dfrac{1}{a_2+a_3}+\ldots$
$\ldots+\dfrac{1}{a_2+a_n}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}+a_n}\Big)^2,$
где $a_1,\ldots,a_n>0$.

32. $\left|\sqrt{2}-\dfrac{p}{q}\right|>\dfrac{1}{3q^2}$, где $p\in Z$, $q\in\mathrm{N}$.

33. $a^m+a^n\geqslant m^m+n^n$, где $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$, $m,n\in\mathrm{N}$.

34. $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}\,\dfrac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\geqslant\dfrac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}\,\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, где $n>1$, $a_i>0$ $(i=0,1,\ldots,n)$, $a_{i-1}a_{i+1}\leqslant a_i^2$ $(i=1,\ldots,n-1)$.

35. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n}}}}}<2.$

36. $\sqrt{3(ab+bc+ac)}\,(9(a+b+c)^2+ab+bc+ac)\leqslant$
$\leqslant 9((a+b+c)^3+abc),$

где $a,b,c\geqslant 0$.

37. $\sin^2\alpha_1+\ldots+\sin^2\alpha_n\leqslant\dfrac{9}{4}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n>0$, $\alpha_1+\ldots$ $\ldots+\alpha_n=\pi$.

38. $(a+b+3c)(a+3b+c)(3a+b+c)+8(ab+bc+ac+abc)\geqslant$
$\geqslant\dfrac{32}{3}\sqrt{abc},$
где $a,b,c>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$.

39. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2>\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Big)$, где $a_1,\ldots,a_n>0$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant$ $\geqslant\sqrt{k}$ $(k=1,\ldots,n)$.

40. $\sin(x_1+x_2)+\sin(x_2+x_3)+\ldots$
$\ldots+\sin(x_{n-1}+x_n)+\sin(x_n+x_1)>2,$
где $n\geqslant 3$, $n\in\mathrm{N}$, $x_1,\ldots,x_n>0$, $x_1+\ldots+x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

41. $a^3+b^3+c^3\geqslant a^2(2c-b)+b^2(2a-c)+c^2(2b-a)$, где $a,b,c>$ >0.

42. $(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)\times$

$$\times (a_1+a_2+a_3-a_4) \leqslant 8\,(a_1^2a_4^2+a_2^2a_3^2),$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$.

43. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{11}+\left(\dfrac{b-c}{b+c}\right)^{11}+\left(\dfrac{c-a}{c+a}\right)^{11}\leqslant 1$, где $a, b, c > 0$.

44. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant B\,(|a_1|+2\,|a_n|)$, где $|b_1+\ldots+b_k| \leqslant B$ $(k = 1,\ldots,n)$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ (неравенство Абеля).

45. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant Ba_1$, где $|b_1+\ldots+b_k| \leqslant B$, $(k=1,\ldots,n)$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ (неравенство Абеля).

46. $\sum\limits_{m=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{a_nb_m}{n+m} \leqslant \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{p}}\left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{m=1}^{k} b_m^q\right)^{1/q}$, где $p > 1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $a_i, b_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$ (неравенство Гильберта).

47. $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{a_1+\ldots.+a_k}{k}\right)^p \leqslant \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p$, где $p>1$, $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n \geqslant 0$ (неравенство Харди).

48. $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \pi^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2a_k^2\right)$ (неравенство Карлесона).

49. а) $b_1 \geqslant \sqrt{b_2}$; б) $b_k^2 \geqslant b_{k-1}b_{k+1}$, где $k = 2,\ldots,n-1$, $b_k = \dfrac{1}{c_n^k}a_1a_2a_3\ldots a_{k-1}a_k + a_1a_2\ldots a_{k-1}a_{k+1}+\ldots+a_1a_2\ldots a_{k-1}a_n+\ldots$ $\ldots + a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n$ $(k=1,\ldots,n)$ и $a_1,\ldots,a_n>0$ (неравенство Ньютона).

50. $\sqrt[k]{b_k} \geqslant \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ $(k = 2,\ldots,n-1)$, где b_k определены в предыдущей задаче (неравенство Мерсенна).

51. $1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\ldots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\ldots+x_n}} < \dfrac{\pi}{2}$, где $n\in \mathrm{N}$, $x_0=0$, $x_i>0$, $i=1,\ldots,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

52. $(xy+yz+xz)\left(\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(x+z)^2}\right) \geqslant \dfrac{9}{4}$, где x, y, $z>0$.

53. $2^{1/2}4^{1/4}\ldots(2^n)^{1/2^n} < 4$, где $n \in \mathrm{N}$.

54. $2\sum\limits_{i<j} x_i x_j \leqslant \dfrac{n-2}{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i x_i^2}{1-a_i}$, где $n \geqslant 2$, $a_i, \ldots, a_n$, $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n > 0$ и $a_1 + \ldots + a_n = x_1 + \ldots + x_n = 1$.

55. $\sum\limits_{n=2}^{N} a_2 a_3 \ldots a_n < 1$, где $N \geqslant 2$ — натуральное число, $a_n = p_1^{-1} + \ldots + p_k^{-1}$, а $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все различные простые делители натурального числа n.

56. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i\,(x_{n+1} - x_i)} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{n+1}\,(x_{n+1} - x_i)}$, где $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+1}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$

57. $a^2x + b^2y + c^2z > d^2$, где $x, y, z > 0$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leqslant 1$ и a, b, c, d — стороны некоторого четырехугольника.

58. $\dfrac{1-h}{2} < \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i}\,(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \dfrac{1+h}{2}$, где $0 = x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{2n+1} = 1$ и $x_{i+1} - x_i \leqslant h$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$.

59. $2^n \cdot n! \leqslant \dfrac{(m+n)!}{(m-n)!} \leqslant (m^2 + m)^n$, где $n \leqslant m$ и $m, n \in \mathrm{N}$.

60. $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, где a, b, c — стороны некоторого треугольника.

61. $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$, где $1 < a < b < c$.

62. $(p(xy))^2 \leqslant p\,(x^2)\,p\,(y^2)$, где $p\,(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$.

63. $\dfrac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \dfrac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \dfrac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leqslant \dfrac{1}{abc}$, где a, b, $c > 0$.

64. $\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geqslant 1$, где $a, b \in Z$, $a \neq b$.

65. $(y^3 + x)\,(z^3 + y)\,(x^3 + z) \geqslant 125xyz$, где $x, y, z \geqslant 2$.

66. $\dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}\right) > \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$, где $n \in \mathrm{N}$ и $n \geqslant 2$.

67. $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^3 \geqslant \max\left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_i, \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right)$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ и $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

68. $\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$, где $x, y, z > 1$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

69. $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geqslant 0$, где x — отличное от 0 действительное число.

70. $\operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha_1 \ldots \operatorname{tg}\alpha_n \geqslant n^{n+1}$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\operatorname{tg}\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots + \operatorname{tg}\left(\alpha_n - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant n - 1.$$

71. $\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{n-1} \geqslant 1998$, где $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ и

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \ldots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

72. $x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n$, где $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$.

73. $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant 1$, где $a, b, c > 0$.

74. $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_n$, где $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$ при любых $i, j = 1, 2, \ldots$

75. $u_{n+2} + u_n \geqslant 2 + \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$, где $n \in \mathrm{N}$ и $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, $n = 1, 2, \ldots$

76. $\max(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 2$, где $n > 3$, $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n$ и $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2$.

77. $7(pq + qr + rp) \leqslant 2 + 9pqr$, где $p, q, r \geqslant 0$ и $p + q + r = 1$.

78.
$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \ldots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leqslant \frac{3}{5},$$
где $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_6 \leqslant 1$.

79. $(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geqslant 60abc$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.

80. $x^3 + y^3 \leqslant 2$, где $x, y > 0$ и $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$.

81. $\dfrac{1}{x^k}+\dfrac{1}{y^k}+\dfrac{1}{z^k}\geqslant x^k+y^k+z^k$, где $k\geqslant 2$, $k\in\mathrm{N}$ и $x,y,z>0$, $xyz=1$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqslant x+y+z$.

82. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant\dfrac{(2n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{3}$, где $x_1<x_2<\ldots<x_n$ и $x_1,\ldots,x_n\in\mathrm{N}$.

83. $\dfrac{1}{n-1+x_1}+\dfrac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$, где $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ и $x_1x_2\ldots x_n=1$.

84. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\leqslant\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}+\ldots+\dfrac{1}{y_n}$, где $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n>0$, $x_1y_1<x_2y_2<\ldots<x_ny_n$ и $x_1+x_2+\ldots+x_k\geqslant y_1+y_2+\ldots+y_k$, $k=1,2,\ldots,n$.

85. $a^3+b^3+c^3\geqslant a+b+c$, где $a,b,c>0$ и $ab+bc+ac\leqslant 3abc$.

86. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|a_i-a_j|+|b_i-b_j|)\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_i-b_j|$.

87. $a_1a_2^4+a_2a_3^4+\ldots+a_na_1^4\geqslant a_2a_1^4+a_3a_2^4+\ldots+a_1a_n^4$, где $a_1<a_2<\ldots<a_n$.

88. $x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\dfrac{4}{27}$, где $x,y,z\geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

89. $\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ca}\geqslant\dfrac{3}{2}$, где $a,b,c>0$ и $a^2+b^2+c^2=3$.

90. $\dfrac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\dfrac{3}{4}$, где a, b, $c>0$.

91. $p(x^2+y^2)\geqslant p(2xy)$, где $p(t)=t^2-4t$ и $x,y\geqslant 1$.

92. $n!\leqslant\left(\dfrac{7n+9}{16}\right)^n$, где $n\in\mathrm{N}$.

93. $\dfrac{1-x^{n+1}}{n+1}>\dfrac{1-x^n}{n}\sqrt{x}$, где $0<x<1$.

94. $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\ldots\sqrt[n]{n}}}}<2$, где $n\geqslant 2$, $n\in\mathrm{N}$.

95. $$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\geqslant 3\sqrt{ab+bc+ac},$$ где $a,b,c>0$.

96. $\sin n\alpha\leqslant 0$, где $n\in\mathrm{N}$, $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha\leqslant 0$ и $0<\alpha<\pi$.

97. $\sin(n+1)\alpha \geqslant 0$, где $n \in \mathrm{N}$, $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha \leqslant 0$ и $0 < \alpha < \pi$.

98. $\sin^2\beta \sin\frac{\alpha}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) > \sin^2\alpha \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$, где $0 < \alpha < \beta$ и $\alpha + \beta < \pi$.

99. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(n-k)x}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{k}\right| < 6$, где $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$.

100. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(n-k)x}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{k}\right| < 4\sqrt{2}$, где $n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{N}$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василевский А.Б.* Методы решения задач. — Минск: Высшая школа, 1974.

2. *Гальперин Г.А.*, *Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.

3. *Кюршак Й. и др.* Венгерские математические олимпиады. — М.: Мир, 1976.

4. *Маршалл А.*, *Олкин И.* Неравенства, теория мажоризации и ее приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1983.

5. Сборник задач киевских математических олимпиад. — Киев: Вища школа, 1984.

6. *Тоноян Г.А.* Избранные теоремы и задачи по математике. — Ереван: Луйс, 1970 (на арм. яз.).

7. Физико-математические олимпиады. — М.: Знание, 1977.

8. *Харди Г.*, *Литтльвуд Д. Полиа Г.* Неравенства / Пер. с англ. — М.: 1948.

9. Gazeta matematika, Bucuresti, 1978–1986.

10. Квант, М., 1970–1997.

11. Korepiskolai matimatikai lapok, Budapest, 1972–1984.

12. Математика и физика в школе, Ереван, 1972–1984 (на арм. яз.).

13. Математика в школе, М., 1970–1996.

14. Математика, Софиа, 1975–1986.

15. Matematyka, Warszawa, 1974–1985.

16. Mathematik in der Schule, Berlin, 1967–1986.

17. Crux with Mathematical Mayhem, Ottawa (Ontario), 1998–2000.

Учебное издание

СЕДРАКЯН Наири Моликович,
АВОЯН Амбарцум Мамиконович

НЕРАВЕНСТВА. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Оригинал-макет *Е. Ю. Морозова*
Оформление обложки *А. Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 11.07.02.
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16. Тираж 3000 экз.
Заказ тип. №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

ISBN 5-9221-0273-7

9 785922 102735